ग्रहों एवं उपग्रहों की गति
Motion of Planets and Satellites

1. एक उपग्रह पृथ्वी-तल के समीप एक कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 मी मानते हुए, उपग्रह की कक्षीय चाल तथा परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए। ($g = 9.8$ मी/से^{2})

हल $v_0 = \sqrt{gR_e} = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6}$ मी/से

$= 7.92 \times 10^3$ मी/से $= 7.92$ किमी/से

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R_e}{g}\right)} = 2 \times 3.14\sqrt{\left(\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}\right)} \text{ सेकण्ड}$$

$= \mathbf{5075}$ **सेकण्ड**

2. समझाइए कि तुल्यकाली उपग्रह क्या होता है? इसकी उपयोगिता क्या है?

अथवा **भू-तुल्यकाली उपग्रह क्या होता है?**

उत्तर जिस उपग्रह का पृथ्वी के परित: परिक्रमण काल 24 घण्टे होता है उसे तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं। यह पृथ्वी के सापेक्ष सदैव स्थिर दिखायी देता है, अत: इसको भू-स्थिर उपग्रह भी कहते हैं। इसका उपयोग दूरसंचार में किया जाता है।

3. पृथ्वी के पृष्ठ से पलायन वेग 11 किमी/से है। किसी दूसरे ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की अपेक्षा दोगुनी है तथा उसका द्रव्यमान पृथ्वी की अपेक्षा 2.88 गुना अधिक है। इस ग्रह से पलायन वेग कितना होगा?

हल

$$v_p = v_e\sqrt{\frac{M_p}{M_e} \times \frac{R_e}{R_p}} = v_e\sqrt{\frac{2.88\,M_e}{M_e} \times \frac{R_e}{2\,R_e}}$$

$= 11.0 \times 1.2$

$= \mathbf{13.2}$ **किमी/से**

4. जब हम पृथ्वी की सतह से ऊपर जाते हैं तो गुरुत्वीय त्वरण का मान बदलता है। आवश्यक सूत्र दीजिए।

उत्तर जब हम पृथ्वी की सतह से ऊपर जाते हैं तो गुरुत्वीय त्वरण g का मान घटता है, अत: $g' = g\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)$.

5. पलायन वेग के आधार पर समझाइए कि चन्द्रमा पर वायुमण्डल नहीं है।

उत्तर चन्द्रमा पर पलायन वेग (v_e) का मान लगभग 2.38 किमी/से है जो वायुकणों के औसत वेग से काफी कम है, अत: वायुकण चन्द्रमा पर नहीं रुक सकते। चन्द्रमा पर वायुमण्डल न होने का यही कारण है।

6. क्या किसी कृत्रिम उपग्रह को किसी ऐसी कक्षा में स्थापित करना सम्भव है जिससे वह सदैव लखनऊ (या दिल्ली) के ऊपर दिखाई देता रहे? कारण दीजिए।

उत्तर नहीं, क्योंकि लखनऊ (या दिल्ली) विषुवतीय तल में नहीं है।

7. पृथ्वी तल से किसी पिण्ड का पलायन वेग 11.2 किमी/से है। यदि किसी अन्य ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की 1/3 तथा द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 1/4 हो, तो उस ग्रह से पलायन वेग कितना होगा?

ITIQuestionBank.com

हल
$$\frac{v_p}{v_e} = \frac{\sqrt{2GM_p/R_p}}{\sqrt{2GM_e/R_e}} = \sqrt{\frac{M_p}{M_e} \times \frac{R_e}{R_p}} = \sqrt{\left(\frac{M_e/4}{M_e}\right)\left(\frac{R_e}{R_e/3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$v_p = \frac{v_e\sqrt{3}}{2} = \frac{11.2 \times 1.732}{2} = \mathbf{9.699}$$ **किमी/से**

8. उपग्रह कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर उपग्रह दो प्रकार के होते हैं— प्राकृतिक उपग्रह तथा कृत्रिम उपग्रह।

9. प्राकृतिक उपग्रह को परिभाषित कीजिए।

उत्तर वे आकाशीय पिण्ड जो ग्रहों के चारों ओर चक्कर लगाते रहते हैं तथा प्राकृतिक प्रदत्त होते हैं, प्राकृतिक उपग्रह कहलाते हैं; जैसे— चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।

10. कृत्रिम उपग्रह को परिभाषित कीजिए।

उत्तर विज्ञान की उन्नति से प्रभावित हो मनुष्य ने कई उपग्रह बनाकर उन्हें सोद्देश्य पृथ्वी के चारों ओर विभिन्न कक्षाओं में स्थापित किया है। इन उपग्रहों को कृत्रिम उपग्रह कहते हैं। 4 अक्टूबर, 1957 को पहला कृत्रिम उपग्रह स्पुतनिक-I प्रक्षेपित किया गया था।

11. गुरुत्वीय त्वरण g का मान पृथ्वी के किस भाग पर अधिक होता है?

उत्तर पृथ्वी पूरी तरह गोल न होकर दोनों ध्रुवों पर चपटी है अर्थात् विषुवत् रेखा पर पृथ्वी की त्रिज्या ध्रुवों की त्रिज्या से अधिक होती है।

$\therefore g$ का मान विषुवत् रेखा पर सबसे कम व ध्रुवों पर सबसे अधिक होता है।

12. किसी उपग्रह की कक्षीय चाल व उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊँचाई में क्या सम्बन्ध है?

उत्तर $\because$ उपग्रह की कक्षीय चाल $v_o = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E + h}}$

$\therefore$ स्पष्ट है कि उपग्रह पृथ्वी के कक्षीय तल से जितना अधिक दूर होगा (अर्थात् h जितना ज्यादा होगा), उसकी कक्षीय चाल उतनी ही कम होगी।

13. किसी उपग्रह को ग्रह के परितः घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल कहाँ से प्राप्त होता है?

उत्तर उपग्रह तथा ग्रह के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल से।

14. पृथ्वी तल पर पलायन वेग का मान बताइए।

उत्तर 11.2 किमी/से।

15. पृथ्वी के समीप परिक्रमा करने वाले कृत्रिम उपग्रह के कक्षीय वेग एवं पलायन वेग में सम्बन्ध लिखिए।

उत्तर $v_e = v_o\sqrt{2}$

16. जब आप पृथ्वी तल से नीचे जाते है तो गुरुत्वीय त्वरण का मान बढ़ता है अथवा घटता है?

उत्तर पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान कम होता है।

ITI Question Bank.com

1. पृथ्वी तल से कितना नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का (i) आधा रह जायेगा, (ii) चौथाई रह जायेगा।

How much depth from earth level the gravitational acceleration becomes (i) half from gravitational acceleration on the earth level/surface. (ii) 1/4 from gravitational acceleration on the earth level.

हल पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण $g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$

(i) $$g' = \frac{g}{2}$$

अत: $$\frac{g}{2} = g\left(1 - \frac{h}{6400}\right)$$

अथवा $$\frac{h}{6400} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{6400} = \frac{1}{2}$$

अत: $h =$ **3200 किमी**

(ii) इसी प्रकार, $g' = g/4$

अत: $$\frac{g}{4} = g\left(1 - \frac{h}{6400}\right)$$

$$\frac{h}{6400} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h}{6400} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \textbf{4800 किमी}$$

2. पृथ्वी तल से किस ऊँचाई पर g का मान वही है जो एक 100 किमी गहरी खाई में है?

At which height from the earth/ground level, the value of g is equal to the value of g in 100 km deep ditch.

हल माना पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर होगा।

$\therefore$ 100 किमी गहरी खाई में g का मान,

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right) = g\left(1 - \frac{100}{6400}\right)$$

ITI Question Bank.com

$$g' = g\frac{63}{64} = \frac{63}{64}g$$

अत: h ऊँचाई पर g का मान $\frac{63}{64}g$ होगा।

तब,
$$\frac{63}{64}g = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2}$$

$$\frac{63}{64} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2}$$

$$\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2 = \frac{64}{63}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{h}{R_e} = \sqrt{\frac{64}{63}}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{h}{R_e} = \frac{8}{\sqrt{63}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{R_e} = \frac{8}{\sqrt{63}} - 1 = \frac{8}{7.937} - 1 = 1.00793 - 1 = 0.00793$$

$$\Rightarrow \quad h = R_e \times 0.00793 = 6400 \times 0.00793 = \mathbf{50.752}$$ **किमी**

3. कैपलर के ग्रहों की गति सम्बन्धी नियम लिखिए।

Write Kepler's law of planet movement.

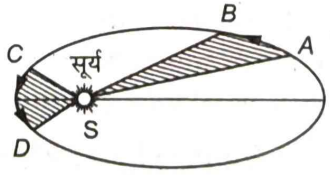
अथवा **ग्रहों के गति सम्बन्धी कैपलर के नियमों का उल्लेख कीजिए।**

Explain the Kepler's law of planet movement.

उत्तर **कैपलर के ग्रहों की गति सम्बन्धी नियम** कैपलर के ग्रहों की गति सम्बन्धी नियम निम्न प्रकार हैं

(i) सभी ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घ-वृत्ताकार कक्षाओं (elliptical orbits) में चक्कर लगाते हैं तथा सूर्य, उन कक्षाओं के एक फोकस पर स्थित होता है।

(ii) सूर्य तथा किसी ग्रह को मिलाने वाली रेखा बराबर समय-अन्तराल में बराबर क्षेत्रफल पार (sweep) करती है अर्थात् प्रत्येक ग्रह की क्षेत्रीय चाल (areal speed) नियत रहती है। अत: जब ग्रह सूर्य के समीप होता है, तो उसकी चाल अधिकतम होती है तथा जब दूर होता है, तो उसकी चाल न्यूनतम होती है। चित्र 4.1 में एक ग्रह की कक्षा को दर्शाया गया है। यदि यह ग्रह किसी दिये समय-अन्तराल में A से B तक जाता है तथा उतने ही समय-अन्तराल में C से D तक जाता है, तब क्षेत्रफल SAB तथा SCD आपस में बराबर होंगे।



चित्र 4.1

(iii) सूर्य के चारों ओर किसी भी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्द्ध-दीर्घ अक्ष (semi-major axis) के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।

ITI Question Bank.com

अत: यदि किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर परिक्रमण काल T तथा उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा का अर्द्ध-दीर्घ अक्ष a हो, तो तृतीय नियम के अनुसार, $T^2 \propto a^3$ अथवा T^2/a^3 = नियतांक अर्थात् सभी ग्रहों के लिए T^2/a^3 का मान नियत रहता है।

4. कैपलर के ग्रहों की गति सम्बन्धी नियमों से न्यूटन ने क्या निष्कर्ष निकाले?

From the Kepler's law of planetary motion, what were the conclusions drawn by Newton?

अथवा **ग्रहों की गति सम्बन्धी कैपलर के नियमों से सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रह पर लगने वाला बल सूर्य से उसकी दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।**

From the Kepler's law of planetary motion, prove that force applied on the planet is inversely proportional to the distance from the sun.

अथवा **कैपलर के ग्रहों की गति सम्बन्धी नियमों के आधार पर न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण सम्बन्धी व्युत्क्रम वर्ग नियम स्थापित कीजिए।**

On the basis of Kepler's law of planetary motion, state the Newton's inverse square gravitational law.

उत्तर **कैपलर के नियमों से न्यूटन के निष्कर्ष** न्यूटन ने पाया कि अधिकांश ग्रहों (बुध व प्लूटो को छोड़कर) की सूर्य के परित: कक्षाएँ लगभग वृत्ताकार हैं। कैपलर के द्वितीय नियम के अनुसार, किसी ग्रह की क्षेत्रीय चाल नियत रहती है। अत: वृत्ताकार कक्षा में ग्रह की रेखीय चाल (v) नियत होगी। चूँकि यह वृत्ताकार पथ पर चल रहा है; अत: ग्रह पर केन्द्र (सूर्य) की ओर अभिकेन्द्र बल F लगता है तथा $F = mv^2/r$,

जहाँ, m ग्रह का द्रव्यमान, v ग्रह की रेखीय चाल तथा r वृत्ताकार कक्षा की त्रिज्या है।

यदि ग्रह का परिक्रमण काल T है, तो $v = \dfrac{\text{एक चक्कर में तय की गई रेखीय दूरी}}{\text{परिक्रमण काल}} = \dfrac{2\pi r}{T}$

$$\therefore \quad F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{m}{r}\left(\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right) = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

परन्तु, कैपलर के तीसरे नियम के अनुसार, $T^2 = Kr^3$

$$\therefore \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{K}\left(\frac{m}{r^2}\right)$$

अथवा $$F \propto \frac{m}{r^2} \qquad \left[\because \frac{4\pi^2}{K} \text{ अचर है।}\right]$$

इस प्रकार, कैपलर के नियमों के आधार पर न्यूटन ने निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले

1. ग्रह पर एक अभिकेन्द्र बल (F) कार्य करता है जिसकी दिशा सूर्य की ओर होती है।
2. यह बल ग्रह की सूर्य से औसत दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है ($F \propto 1/r^2$)।
3. यह बल ग्रह के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है ($F \propto m$)।

इन निष्कर्षों के साथ-साथ न्यूटन ने यह बताया कि कैपलर के नियम केवल सूर्य एवं ग्रह के बीच ही सत्य नहीं हैं, अपितु ब्रह्माण्ड में स्थित किन्हीं भी दो पिण्डों के लिए भी सत्य हैं।

5. न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम लिखिए तथा इसके आधार पर G की परिभाषा दीजिए।

Write the Newton's universal gravitational law and define G on the basis of this law.

उत्तर **न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम** इस नियम के अनुसार, किन्हीं दो द्रव्य-कणों के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। बल की दिशा दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है।

ITI Question Bank.com

G की परिभाषा

सूत्र, $$F = G\left(\frac{m_1 m_2}{r^2}\right) \text{ से, } G = \frac{F \times r^2}{m_1 \times m_2}$$

अब यदि $m_1 = m_2 = 1$ तथा $r = 1$ तो $G = F$

अतः, "गुरुत्वाकर्षण नियतांक उस पारस्परिक आकर्षण बल के बराबर होता है जो एकांक दूरी पर रखे एकांक द्रव्यमान के दो द्रव्य-कणों के बीच कार्य करता है तथा जिसकी दिशा कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है।"

6. सूर्य से दो ग्रहों की दूरियाँ क्रमशः 10^{11} मी तथा 10^{10} मी हैं। इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

The distance of two planets from the sun are 10^{11} m and 10^{10} m respectively. Find the ratio of their speeds.

अथवा **दो ग्रहों की सूर्य से औसत दूरियाँ क्रमशः 10^{11} मी व 10^{10} मी हैं। ग्रहों के आवर्तकालों व चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।**

The average distances of two planets from the sun are 10^{11} m and 10^{10} m respectively. Find the ratio of their time periods and speeds.

हल कैपलर के तृतीय नियम के अनुसार, $T^2 = Kr^3$

जहाँ, T ग्रह का आवर्तकाल तथा r ग्रह की सूर्य से दूरी है। यदि ग्रहों के आवर्तकाल T_1 व T_2 तथा सूर्य से दूरियाँ क्रमशः r_1 व r_2 हों, तो

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \text{अथवा} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} \qquad \text{... (i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{10^{11}}{10^{10}}\right)^{3/2} = \frac{10^{3/2}}{1} \quad \text{या} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{10\sqrt{10}}{1}$$

अतः $$T_1 : T_2 = 10\sqrt{10} : 1$$

यदि ग्रहों की कक्षाएँ वृत्ताकार हों तथा इनमें ग्रहों की चाल क्रमशः v_1 व v_2 हों, तो

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} \text{ तथा } v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}; \quad \text{अतः} \quad \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

परन्तु, समी (i) से, $(T_2 / T_1) = (r_2 / r_1)^{3/2}$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{10^{10}}{10^{11}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

अथवा $$v_1 : v_2 = \mathbf{1 : \sqrt{10}}$$

7. यदि दो ग्रहों की त्रिज्याएँ r_1 तथा r_2 हों एवं उनके माध्य घनत्व d_1 तथा d_2 हों तो सिद्ध कीजिए कि दोनों ग्रहों पर गुरुत्वीय त्वरणों का अनुपात $r_1 d_1 : r_2 d_2$ होगा।

If the radii of two planets are r_1 and r_2 and their mean density are d_1 and d_2 then prove that the ratio of gravitational accelerations on both the planets $r_1 d_1 : r_2 d_2$.

हल $\because$ द्रव्यमान, M = आयतन × घनत्व $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times d$

अतः सूत्र $g = \frac{GM}{r^2}$ से,

ITI Question Bank.com

पहले ग्रह का गुरुत्वीय त्वरण, $g_1 = \dfrac{G \times \frac{4}{3}\pi r_1^3 d_1}{r_1^2} = \dfrac{4}{3}\pi G r_1 d_1$ ... (i)

इसी प्रकार, दूसरे ग्रह का गुरुत्वीय त्वरण, $g_2 = \dfrac{4}{3}\pi G r_2 d_2$ ... (ii)

समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi G r_1 d_1}{\frac{4}{3}\pi G r_2 d_2} = \frac{r_1 d_1}{r_2 d_2}$$

$$\boldsymbol{g_1 : g_2 = r_1 d_1 : r_2 d_2}$$

8. पृथ्वी के केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता 2.5 न्यूटन/किग्रा हो। उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव की गणना कीजिए। (g = 10 मी/से^{2}, पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मी)

Find the distance of a point from the centre of earth where intensity of gravitational region of earth is 2.5 N/kg. Calculate the gravitational potential on that point. (g = 10 m/s^2, radius of earth $R_e = 6.4 \times 10^6$ m)

हल

$$I = \frac{GM_e}{R^2} = \frac{gR_e^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{gR_e^2}{I}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{gR_e^2}{I}} = R_e\sqrt{\frac{g}{I}}$$

$$= 6.4 \times 10^6 \sqrt{\frac{10}{2.5}} = 6.4 \times 10^6 \times 2$$

$$= \mathbf{12.8 \times 10^6} \text{ मी}$$

तथा $V = -E \times r = -$ (2.5 न्यूटन/किग्रा) $\times 12.8 \times 10^6$ मी

$= -$ **32 जूल/किग्रा**

9. सूर्य से एक ग्रह की दूरी, पृथ्वी की अपेक्षा 4 गुनी है। सूर्य के चारों ओर पृथ्वी का परिक्रमण काल एक वर्ष है। उस ग्रह का परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए।

The distance of a planet from the sun is 4 times as compare to the earth. The time period of earth around the sun is one year. Find the time period of this planet.

हल माना पृथ्वी से सूर्य की दूरी $= r_1$ तथा पृथ्वी का सूर्य के परित: परिक्रमण काल $T = 1$ वर्ष

प्रश्नानुसार, ग्रह से सूर्य की दूरी, $r_2 = 4r_1$ तथा ग्रह का परिक्रमण काल $= T_2$

कैपलर के तृतीय नियम से, $T^2 = kr^3$

$$\therefore \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^3$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} = \left(\frac{4r_1}{r_1}\right)^{3/2} = (4)^{3/2} = (2^2)^{3/2} = (2)^2 = 8$$

अत: $T_2 = 8T_1 = 8 \times 1 =$ **8 वर्ष**

प्रश्न 10. गुरुत्वीय त्वरण से क्या तात्पर्य है। पृथ्वी की सतह से *h* ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण के लिए व्यंजक पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण तथा पृथ्वी की त्रिज्या के पदों में प्राप्त कीजिए।

What is meant by gravitational acceleration? Derive an expression for gravitational acceleration from the earth's surface at a height *h* in terms of gravitational acceleration on the earth's surface and radius of earth.

अथवा **पृथ्वी तल से ऊपर तथा नीचे जाने पर '*g*' के मान में विचरण की विवेचना कीजिए। क्या दोनों परिस्थितियों में '*g*' के घटने की दर समान होगी?**

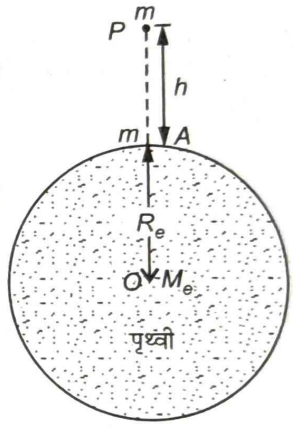
Derive the deviation in the value of '*g*' when we go up and down from the surface of earth. In both the cases the decrement of '*g*' is same?

उत्तर **गुरुत्वीय त्वरण** "स्वतन्त्रतापूर्वक पृथ्वी की ओर गिरती हुई किसी वस्तु के वेग में 1 सेकण्ड में होने वाली वृद्धि अर्थात् त्वरण को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं।" इसे '*g*' से प्रदर्शित करते हैं।

पृथ्वी तल से ऊँचाई के साथ '*g*' के मान में विचरण

"पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर ऊँचाई में वृद्धि के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है।" इस तथ्य को अग्रवत् से समझा जा सकता है

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है, जिसको इसके केन्द्र O पर ही निहित माना जा सकता है तथा R_e इसकी त्रिज्या है। यदि m द्रव्यमान की वस्तु पृथ्वी तल पर बिन्दु A पर स्थित है (चित्र 4.2), तो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमानुसार, वस्तु पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल, $F = \frac{GM_e m}{R_e^2}$.



चित्र 4.2

यह बल ही पृथ्वी तल पर इस वस्तु का भार mg होगा।

अत: $mg = \frac{GM_e m}{R_e^2}$ (जहाँ, g = पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण) ...(i)

जब इस वस्तु को पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु P पर रखा जायेगा, जहाँ गुरुत्वीय त्वरण g' हो, तो उपर्युक्त समी (i) के अनुरूप इस स्थान पर,

$$mg' = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2} \quad ...(ii)$$

जहाँ दूरी $OP = (OA + AP) = (R_e + h)$

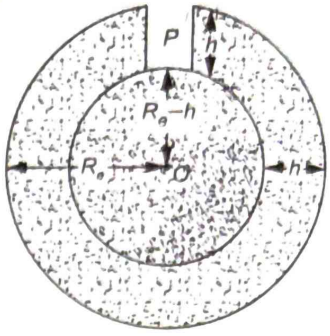
समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर, $\frac{g'}{g} = \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2} = \frac{1}{\left\{\frac{(R_e + h)^2}{R_e^2}\right\}}$

अत: $\frac{g'}{g} = \frac{1}{\left(\frac{R_e + h}{R_e}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$ अथवा $g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$ ...(iii)

अथवा $g' = g\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2}$ अथवा $g' = g\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)$ ...(iv)

ITI QuestionBank.com

उपर्युक्त समी (iii) से स्पष्ट है कि पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर h के बढ़ने के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण $g' < g$ अर्थात् गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है तथा अनन्त पर $h = \infty$ के लिए यह शून्य हो जाएगा।



चित्र 4.3

पृथ्वी तल से गहराई के साथ 'g' के मान में विचरण

"पृथ्वी तल से नीचे जाने पर गहराई में वृद्धि के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है।" इस तथ्य को निम्नवत् समझा जा सकता है

माना m द्रव्यमान की कोई वस्तु पृथ्वी के अन्दर इसकी सतह से h गहराई पर स्थित बिन्दु P पर रखी है जिसकी पृथ्वी के केन्द्र O से दूरी $(R_e - h)$ होगी।

इस अवस्था में यदि O को केन्द्र मानकर एक गोला खींचा जाये जिसकी त्रिज्या $(R_e - h)$ हो तो वस्तु अन्दर वाले ठोस गोले के तल पर स्थित होगी तथा बाहरी कवच के अन्दर होगी, परन्तु किसी भी खोखले गोल कवच के भीतर स्थित वस्तु पर आकर्षण बल शून्य होता है; अत: केवल अन्दर वाले ठोस गोले के कारण ही वस्तु पर आकर्षण बल कार्य करेगा।

अन्दर वाले ठोस गोले का द्रव्यमान, $M'_e = (R_e - h)$ त्रिज्या के गोले का आयतन $\times$ पृथ्वी का माध्य घनत्व

$$= \frac{4}{3}\pi (R_e - h)^3 \times \rho$$

अत: न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमानुसार, अन्दर वाले गोले के कारण वस्तु पर आकर्षण बल,

$$F = \frac{GM_e' m}{(R_e - h)^2} = G \times \frac{4\pi}{3} \frac{(R_e - h)^3 \times \rho m}{(R_e - h)^2} = \frac{4}{3}\pi G (R_e - h)\rho m$$

यह बल वस्तु के भार mg' के बराबर होना चाहिए, जहाँ g' पृथ्वी तल से h गहराई पर स्थित बिन्दु पर गुरुत्वीय त्वरण है।

अत:
$$mg' = \frac{4}{3}\pi G (R_e - h)\rho m \quad ...(i)$$

अब यदि m द्रव्यमान की यह वस्तु पृथ्वी के तल पर स्थित हो, जहाँ गुरुत्वीय त्वरण g हो तो उपर्युक्त समी (i) में $h = 0$ रखने पर तथा $g' = g$ रखने पर,

$$mg = \frac{4}{3}\pi G (R_e)\rho m \quad ...(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e - h}{R_e}\right) \quad \text{अथवा} \quad g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right) \quad ...(iii)$$

अर्थात् $g' < g$

अत: जैसे-जैसे हम पृथ्वी तल से नीचे की ओर जाते हैं, h में वृद्धि के साथ-साथ गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता जाता है तथा पृथ्वी के केन्द्र O पर (जहाँ, $h = R_e$) इसका मान शून्य हो जाता है।

उपर्युक्त दोनों परिस्थितियों में 'g' के घटने की दर समान नहीं होगी, बल्कि पृथ्वी तल से गहराई में जाने की तुलना में तल से ऊँचाई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण तेजी से घटता है।

प्रश्न 11. गुरुत्वीय त्वरण तथा गुरुत्वाकर्षण नियतांक में सम्बन्ध लिखिए। पृथ्वी तल से कितना, (i) नीचे जाने पर (ii) ऊपर जाने पर, गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण का आधा रह जायेगा? (R_e = 6400 किमी)

Write the relation between gravitational acceleration and gravitational constant. How much from the earth's surface (i) if we go down, (ii) if we go up, the gravitational acceleration will be half of the gravitational acceleration on earth's surface (R_e = 6400 km)

उत्तर **'g' तथा 'G' में सम्बन्ध** माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है। पृथ्वी का कुल द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित माना जा सकता है। माना m द्रव्यमान की एक वस्तु पृथ्वी के धरातल से नगण्य ऊँचाई पर स्थित है। अत: इस वस्तु की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी R_e ही मानी जा सकती है। अब, न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से पृथ्वी द्वारा वस्तु पर लगाया गया आकर्षण बल

$$F = \frac{GM_e m}{R_e^2} \quad \ldots(i)$$

इस बल F के कारण ही वस्तु में गुरुत्वीय त्वरण g उत्पन्न होता है। न्यूटन के गति विषयक द्वितीय नियम के आधार पर

बल = द्रव्यमान × त्वरण

$$\therefore \quad F = m \times g \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा समी (ii) की तुलना करने पर,

$$mg = \frac{GM_e m}{R_e^2} \text{ अथवा } g = \frac{GM_e}{R_e^2} \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (iii) ही g तथा G में सम्बन्ध व्यक्त करती है। चूँकि इस व्यंजक में वस्तु का समान द्रव्यमान m नहीं आता, अत: गुरुत्वीय त्वरण g का मान गिरने वाली वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता। इसलिए यदि वायु की अनुपस्थिति में भिन्न-भिन्न द्रव्यमान वाली वस्तुओं को समान ऊँचाई से गिराया जाए तो उनमें उत्पन्न त्वरण (g) समान होने के कारण वे सभी वस्तुएँ पृथ्वी तल पर एकसाथ पहुँचेंगी।

वायु की उपस्थिति में उत्प्लावन प्रभाव व श्यानकर्षण के कारण सभी वस्तुओं के त्वरण भिन्न-भिन्न पाये जाते हैं। इस दशा में भारी वस्तु पृथ्वी-तल पर पहले पहुँचेगी।

(i) पृथ्वी-तल से नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण, $g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$

प्रश्नानुसार, $g' = \frac{g}{2}$; अत: $\frac{g}{2} = g\left(1 - \frac{h}{6400}\right)$

अथवा $\frac{h}{6400} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{6400} = \frac{1}{2}$

अत: $\boldsymbol{h = 3200}$ **किमी**

(ii) पृथ्वी-तल से ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण, $g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$

प्रश्नानुसार, $g' = \frac{g}{2}$; अत: $\frac{g}{2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{6400}\right)^2}$ अथवा $\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{6400}\right)^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{h}{6400}\right)^2 = 2$

अथवा $1 + \frac{h}{6400} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{h}{6400} = 1.414 - 1$

अथवा $h = 6400 \times 0.414 = 2649.6$ किमी = **2650 किमी**

12. भू-स्थिर उपग्रह से आप क्या समझते हैं? इसके क्या उपयोग हैं?

What do you mean by geostationary satellite? What are its uses?

उत्तर हम जानते हैं, कृत्रिम उपग्रह का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{g}}$ होता है। यदि किसी कृत्रिम उपग्रह का यह आवर्तकाल T, पृथ्वी के आवर्तकाल (24 घण्टे) के बराबर हो जाये तो कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर रहेगा

ITI Question Bank.com

अर्थात् वह पृथ्वी की विषुवत रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के ऊपर स्थिर प्रतीत होता है। ऐसा इसलिये होता है कि यह उपग्रह पृथ्वी की अपनी अक्ष पर चक्रण के सिन्क्रोनस होता जाता है अर्थात् किसी समय में उपग्रह की जितनी कोणीय स्थिति बदलती है, उतनी ही विषुवत् रेखा बिन्दु की स्थिति बदल जाती है।

इस प्रकार के उपग्रह को भू-स्थिर उपग्रह या भू-सिन्क्रोनस उपग्रह कहते हैं। इसका उपयोग T.V. तथा अन्य संचार सिग्नलों के परावर्तन के लिए तथा T.V. प्रोग्रामों को संसार के एक भाग से दूसरे भाग में टेलीकास्ट करने के लिए किया जाता है।

13. सिद्ध कीजिए कि यदि पृथ्वी के समीप परिक्रमा कर रहे किसी उपग्रह की कक्षीय चाल 41.4% बढ़ा दी जाये तो वह अपनी कक्षा छोड़कर अन्तरिक्ष में चला जायेगा।

Prove that if the orbital speed of a planet near the earth is increased by 41.4%, then it will left its orbit and go to space.

हल पृथ्वी के समीप किसी उपग्रह की कक्षीय चाल $v_0 = \sqrt{gR}$

प्रश्नानुसार, कक्षीय चाल (v_0) को 41.4% बढ़ा देने पर उपग्रह की नई चाल,

$$V = v_0 + \frac{v_0 \times 41.4}{100} = v_0 + v_0 \times 0.414$$

$$= v_0[1 + 0.414] = 1.414 v_0 = \sqrt{2} v_0$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{gR} = \sqrt{2gR} = \text{पलायन वेग } (v_e)$$

स्पष्ट है कि कक्षीय वेग में 41.4% की वृद्धि करने पर उसका वेग पलायन वेग के बराबर हो जायेगा, अत: उपग्रह अपनी कक्षा छोड़कर पलायन कर जायेगा या अन्तरिक्ष में चला जायेगा।

14. किसी अन्तरिक्ष यान को पृथ्वी के अति समीप वृत्तीय कक्षा में छोड़ा गया है। इस कक्षा में अन्तरिक्ष यान को कितना और अधिक वेग दिया जाये ताकि वह पृथ्वी तल के आकर्षण से बाहर हो जाये?(R_e = 6400 किमी, g = 9.8 मी/से^{2})

A spaceship is launched in a very closed circular orbit of earth. How much more velocity will be given to the spaceship so that it will be free from the attraction of the earth. (R_e = 6400 km, g = 9.8 m/s^2)

हल पृथ्वी के अति समीप अन्तरिक्ष यान की चाल, $v_0 = \sqrt{gR_e}$

पलायन वेग, $v_e = \sqrt{2gR_e} = 1.414\sqrt{gR_e}$

पलायन वेग के लिये आवश्यक वृद्धि, $v_e - v_0 = 1.414\sqrt{gR_e} - \sqrt{gR_e} = 0.414\sqrt{gR_e}$

$$= 0.414\sqrt{(9.8 \times 6400 \times 10^3)} = \mathbf{3.278 \times 10^3} \text{ मी/से}$$

15. पृथ्वी सूर्य के चारों ओर 30 किमी/से की चाल से वृत्तीय पथ पर घूमती है। इसमें सूर्य की ओर दिष्ट त्वरण का मान कितना है? (पृथ्वी का एक चक्कर, 365 दिन में पूरा होता है)

The earth revolves around the sun in the circular path with a speed of 30 km/s. What is the value of direct acceleration in it towards the sun? (Earth completes one revolution in 365 days)

हल दिया है, $T = 365$ दिन $= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ सेकण्ड

$v = 30$ किमी/से $= 30 \times 10^3$ मी/से

अभिकेन्द्र त्वरण, $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v.v}{r} = v.\omega = v.\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{T}$

अत: $$a = \frac{2 \times 3.14 \times 30 \times 10^3}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = \mathbf{5.97 \times 10^{-3}} \text{ मी/से}^2$$

16. पलायन वेग की परिभाषा दीजिए और पृथ्वी की सतह के लिए इसका व्यंजक प्राप्त कीजिए। प्रक्षेपण कोण बदलने पर क्या इसका मान परिवर्तित होगा? पलायन वेग तथा कक्षीय चाल में क्या सम्बन्ध है?

Define escape velocity and derive its expression for earth surface. Will the value of escape velocity change, when change occurs in the launch angle? What is the relation between escape velocity and orbital velocity.

अथवा **पलायन वेग की परिभाषा दीजिए और पृथ्वी तल पर इसके लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। पलायन वेग का मान परिवर्तित होगा, यदि वस्तु को**

(i) किसी ऊँचाई से प्रक्षेपित किया जाए?

(ii) ऊर्ध्वाधर से किसी कोण पर प्रक्षेपित किया जाए?

Define escape velocity and derive its expression on earth surface. The value of escape velocity will change, if an object will (i) Launch from a height. (ii) Launch at any angle of vertical plane.

उत्तर **पलायन वेग** वह न्यूनतम वेग जिससे किसी वस्तु को पृथ्वी तल से फेंकने पर वह पृथ्वी के आकर्षण क्षेत्र से बाहर निकल जाये अर्थात् वापस लौटकर पृथ्वी पर न आ सके, पलायन वेग कहलाता है। इसे v_e से व्यक्त करते हैं।

पलायन वेग के लिए व्यंजक अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य मानने पर, पृथ्वी तल पर स्थित m द्रव्यमान के पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा, $U = -\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$

जहाँ, M_e पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_e पृथ्वी की त्रिज्या है।

अत: m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने के लिए $GM_e m/R_e$ कार्य करना पड़ता है। अत: यदि पिण्ड m को इतने वेग से फेंके कि उसकी गतिज ऊर्जा, कार्य $GM_e m/R_e$ के बराबर हो तो वह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र के बाहर चला जाएगा अर्थात् अनन्त पर चला जाएगा अर्थात् पृथ्वी से सदैव के लिए पलायन कर जाएगा। यही पलायन ऊर्जा होगी।

अत: $$\text{पलायन ऊर्जा} = +\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right) \quad ...(i)$$

इस दशा में पिण्ड को दिया गया वेग ही पिण्ड का पलायन वेग v_e होगा।

अत: पिण्ड की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_e^2$ होगी।

अत: $$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e} \quad \text{अथवा} \quad v_e = \sqrt{\left(\frac{2GM_e}{R_e}\right)} \quad ...(ii)$$

परन्तु, पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण, $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ अथवा $GM_e = gR_e^2$

यह मान समी (ii) में रखने पर, $$v_e = \sqrt{\left(\frac{2gR_e^2}{R_e}\right)}$$

अथवा $$\text{पलायन वेग, } v_e = \sqrt{2gR_e} \quad ...(iii)$$

उपर्युक्त समी (ii) तथा (iii) पृथ्वी तल से किसी पिण्ड के पलायन वेग के लिए अभीष्ट व्यंजक के दो विभिन्न रूप हैं। चूँकि इन सूत्रों में पिण्ड का द्रव्यमान m तथा प्रक्षेपण कोण θ नहीं आता है; अत: पलायन वेग v_e का मान फेंके गये पिण्ड के द्रव्यमान तथा प्रक्षेपण कोण पर निर्भर नहीं करता है। अत: पृथ्वी पर प्रत्येक पिण्ड के लिए पलायन वेग का मान एक ही होता है; चाहे उसका द्रव्यमान कुछ भी हो और वह क्षैतिज के साथ किसी भी कोण पर प्रक्षेपित किया जाये। यह ग्रह की त्रिज्या एवं ग्रह के गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करता है।

ITI Question Bank.com

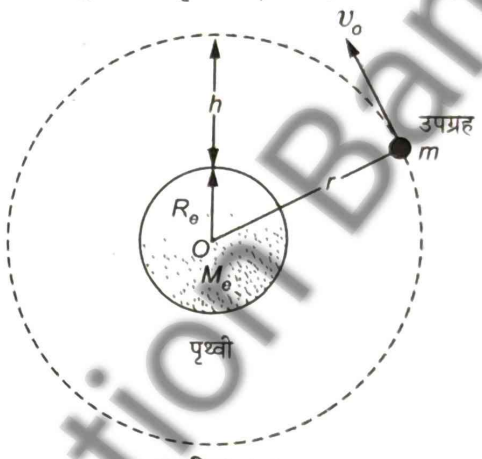
यदि किसी कृत्रिम उपग्रह को पलायन वेग के बराबर वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाए तो उसका पथ परवलयाकार होगा।

कक्षीय चाल तथा पलायन वेग में सम्बन्ध पृथ्वी के पृष्ठ के निकट किसी उपग्रह की कक्षीय चाल $v_0 = \sqrt{gR_e}$ तथा पलायन वेग $v_e = \sqrt{2gR_e}$ होता है। अत: $\frac{v_0}{v_e} = \frac{\sqrt{gR_e}}{\sqrt{2gR_e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_e = \sqrt{2}v_0$

17. उपग्रह क्या है? पृथ्वी की सतह से *h* ऊँचाई पर किसी कृत्रिम उपग्रह की कक्षीय चाल के लिए व्यंजक स्थापित कीजिए। दर्शाइए कि उपग्रह की गति उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।

What are satellites? State the expression for orbital speed of an artificial satellite which revolves around the earth on '*h*' height from the earth's surface. Show that the speed of satellite does not depends on its mass.

उत्तर **उपग्रह** जिस तरह विभिन्न ग्रह सूर्य के चारों ओर परिक्रमा करते हैं, उसी तरह कुछ आकाशीय पिण्ड इन ग्रहों (planets) के चारों ओर भी चक्कर लगाते हैं। इन पिण्डों को उपग्रह (satellites) कहते हैं; जैसे—चन्द्रमा पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षा में चक्कर लगाता है; अत: पृथ्वी एक ग्रह तथा चन्द्रमा पृथ्वी का एक उपग्रह है।



चित्र 4.4

उपग्रह की कक्षीय चाल पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षा जिसकी त्रिज्या r है, में कक्षीय चाल v_o से परिक्रमण कर रहे उपग्रह (द्रव्यमान m) पर एक अभिकेन्द्र बल (mv_o^2/r) लगता है जो पृथ्वी द्वारा उपग्रह पर लगाये गये गुरुत्वाकर्षण बल $(GM_e m/r^2)$ से प्राप्त होता है, जहाँ M_e पृथ्वी का द्रव्यमान है। अत:

$$G\frac{M_e m}{r^2} = \frac{mv_o^2}{r}$$

या $$GM_e = v_o^2 r \quad \text{या} \quad v_o^2 = \frac{GM_e}{r}$$

या $$v_o = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{r}\right)} \qquad ...(i)$$

यदि उपग्रह पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर है तो पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की दूरी ,

$$r = R_e + h$$

जहाँ, R_e पृथ्वी की त्रिज्या है।

r का यह मान समी (i) में रखने पर,

$$v_o = \sqrt{\left[\frac{GM_e}{(R_e + h)}\right]} \qquad ...(ii)$$

ITI Question Bank.com

परन्तु $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$, अत: $v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{(R_e + h)}}$

या $$v_o = R_e \sqrt{\frac{g}{(R_e + h)}} \quad ...(iii)$$

स्पष्ट है कि कक्षीय चाल उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है। यह केवल उसकी पृथ्वी तल से ऊँचाई पर निर्भर करती है।

यदि उपग्रह पृथ्वी तल के अति समीप है अर्थात् $h << R_e$, तब h को R_e की तुलना में नगण्य मान सकते हैं।

अत: समी (iii) से, $v_o = \sqrt{(gR_e)} = \sqrt{(9.8 \times 6.37 \times 10^6)} \approx 8 \times 10^3$ मी/से = 8 किमी/से

उपग्रह की कक्षीय चाल (वेग) के उपर्युक्त सूत्रों में उपग्रह का द्रव्यमान नहीं आता है, अत: इससे सिद्ध होता है कि उपग्रह की कक्षीय चाल (वेग) उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है। अत: भिन्न-भिन्न द्रव्यमान के दो कृत्रिम उपग्रह एक ही कक्षा में साथ-साथ एक ही कक्षीय चाल से परिभ्रमण करेंगे।

18. पृथ्वी तल से *h* ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे कृत्रिम उपग्रह के परिक्रमण काल के लिए सूत्र स्थापित कीजिए।

State the formula for time period of an artificial satellite which revolves around the earth on *h* height from the earth's surface.

उत्तर **कृत्रिम उपग्रह का परिक्रमण काल** यदि कृत्रिम उपग्रह की वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या r हो, जहाँ $r = R_e + h$ (जिसमें R_e = पृथ्वी की त्रिज्या तथा h = पृथ्वी तल से कृत्रिम उपग्रह की ऊँचाई) तो उपग्रह का परिक्रमण काल अर्थात् पृथ्वी के चारों ओर एक चक्कर पूरा करने में लगा समय,

$$T = \frac{2\pi r}{v_o} = \frac{2\pi (R_e + h)}{v_o}$$

जहाँ, उपग्रह की कक्षीय चाल, $v_o = \sqrt{\left[\frac{GM_e}{(R_e + h)}\right]}$

[जिसमें M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान तथा G = सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक]

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi (R_e + h)}{\{GM_e/(R_e + h)\}^{1/2}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\left[\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}\right]} \quad ... (i)$$

परन्तु, $GM_e = gR_e^2$

$$\therefore \quad T = 2\pi \sqrt{\left[\frac{(R_e + h)^3}{gR_e^2}\right]} \quad ... (ii)$$

उपर्युक्त समी (i) तथा (ii) में परिक्रमण काल के अभीष्ट सूत्र हैं।

19. '*m*' द्रव्यमान का एक कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी सतह के समीप वृत्तीय कक्षा में घूम रहा है। दर्शाइए कि इसकी बन्धन ऊर्जा $E = \frac{1}{2}mgR_e$ है। जहाँ, R_e = पृथ्वी की त्रिज्या।

An artificial satellite of mass *m* is revolving in the circular orbit near the earth's surface. Show that its Binding energy is $E = \frac{1}{2}mgR_e$, where R_e = radius of earth.

ITI Question Bank.com

उत्तर m द्रव्यमान के पिण्ड में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा,

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e} \quad ...(i)$$

गतिज ऊर्जा ,

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad ...(ii) \; [v_0 = \text{उपग्रह का वेग}]$$

उपग्रह को आवश्यक केन्द्रीय बल गुरुत्वाकर्षण बल से मिलता है।

अर्थात्

$$\frac{m v_0^2}{R_e} = \frac{GM_e m}{R_e}$$

या

$$m v_0^2 = \frac{GM_e m}{R_e}$$

या

$$K = \frac{1}{2} \times \frac{GM_e m}{R_e}$$

$m v_0^2$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\text{उपग्रह की कुल ऊर्जा} = U + K = -\frac{GM_e m}{R_e} + \frac{1}{2}\frac{GM_e m}{R_e} = -\frac{1}{2}\frac{GM_e m}{R_e} \quad ...(iii)$$

लेकिन,

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \quad \text{या} \quad gR_e = \frac{GM_e}{R_e}$$

अब समी (ii) में $\frac{GM_e}{R_e}$ का मान रखने पर, उपग्रह की कुल ऊर्जा, $E = -\frac{1}{2} \times gR_e m$

पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण करते उपग्रह की बन्धन ऊर्जा अपनी कक्षा छोड़कर पलायन कर जाने के लिये आवश्यक ऊर्जा है।

अत:

$$\text{उपग्रह की कुल ऊर्जा} = -\frac{1}{2} mgR_e$$

20. एक उपग्रह के परिक्रमण काल के लिए व्यंजक का निगमन कीजिए?

Derive an expression for time period of a satellite.

उत्तर **उपग्रह का परिक्रमण-काल** Period of Revolution of Satellite माना कि उपग्रह के एक परिक्रमण काल का समय T है।

तब

$$T = \frac{\text{उपग्रह की वृत्तीय कक्षा की परिधि}}{\text{उपग्रह की कक्षीय चाल}}$$

$$= \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi(R_e + h)}{v_0} \quad ...(i)$$

$v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e + h}}$ का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$T = \frac{2\pi(R_e + h)}{[GM_e/(R_e + h)]^{1/2}}$$

अथवा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}} \quad ...(ii)$$

परन्तु $GM_e = gR_e^2$ अत:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{gR_e^2}} \quad ...(iii)$$

ITIQuestionBank.com

समीकरण (ii) अथवा (iii) से उपग्रह के परिक्रमण-काल की गणना की जा सकती है। इन समीकरणों से स्पष्ट है कि **उपग्रह का परिक्रमण-काल भी केवल उसकी पृथ्वी-तल से ऊँचाई पर निर्भर करता है।** उपग्रह पृथ्वी-तल से जितनी दूर होगा, उसका परिक्रमण-काल उतना ही अधिक होगा। यही कारण है कि चन्द्रमा, जो कि पृथ्वी से 3,84,400 किलोमीटर (2,38,900 मील) दूर है, पृथ्वी का एक परिक्रमण लगभग 27 दिन 7 घण्टे में पूरा करता है, जबकि पृथ्वी के पास का एक कृत्रिम उपग्रह एक दिन में 10 से 20 परिक्रमण तक कर लेता है।

अब यदि उपग्रह पृथ्वी के निकट परिक्रमा कर रहा है अर्थात् $R_e >> h$ तक R_e की तुलना में h को नगण्य मान सकते हैं। अत: ऐसे उपग्रह का परिक्रमण-काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e^3}{gR_e^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}} \quad \text{...(iv)}$$

परन्तु, $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ तथा $M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho$, जहाँ ρ पृथ्वी का माध्य घनत्व है साथ ही साथ यहाँ यह मान लिया गया है कि पृथ्वी गोलाकार है।

अत: उपग्रह का परिक्रमण काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e \times R_e^2}{\frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho \times G}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_e^3 \times 3}{4\pi R_e^3 \rho G}}$$

या,

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad \text{...(v)}$$

ITI Question Bank.com