दृढ़ पिण्डों की गति (घूर्णन गति)
Dynamics of Rigid Bodies (Rotational Motion)

प्रश्न 1. दृढ़ पिण्ड से क्या तात्पर्य है?

उत्तर यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल लगाने पर उसके कणों में एक-दूसरे के सापेक्ष कोई विस्थापन न हो तो ऐसे पिण्ड को दृढ़ पिण्ड कहते हैं।

प्रश्न 2. घूर्णन गति से क्या तात्पर्य है?

उत्तर जब कोई पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परित: इस प्रकार गति करता है कि पिण्ड का प्रत्येक कण वृत्तीय पथ पर चल रहा हो तथा समस्त वृत्तों के केन्द्र उस अक्ष पर हों तो उसकी गति को घूर्णन गति कहते हैं।

प्रश्न 3. जड़त्व आघूर्ण से क्या तात्पर्य है?

उत्तर पिण्ड के किसी कण का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण उस कण के द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष से उस कण की दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।

$$\text{जड़त्व आघूर्ण } (I) = Mr^2$$

प्रश्न 4. एक व्यक्ति घूमते स्टूल पर भुजा फैलाकर बैठा है। यदि वह अचानक अपनी भुजाएँ नीचे गिरा लेता है तो उसके कोणीय वेग, जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय संवेग में क्या परिवर्तन होंगे?

उत्तर कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा, जड़त्व आघूर्ण घट जायेगा तथा कोणीय वेग बढ़ जायेगा।

प्रश्न 5. तैराक पानी में कूदते समय अपने शरीर को मोड़ लेता है, कारण बताइए।

उत्तर तैराक पानी में ऊपर से कूदते समय सीधे कूदने की बजाय अपने शरीर को मोड़ लेता है, इससे जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है और कोणीय वेग का मान बढ़ जाता है, जिससे तैराक हवा में सुगमता से कलैया ले सकता है।

प्रश्न 6. हेलीकॉप्टर में दो नोदक (propellers) ही क्यों लगाते हैं?

उत्तर सन्तुलन बनाये रखने के लिए, क्योंकि यदि इसमें एक ही नोदक हो तो इसके घूमने पर कोणीय संवेग संरक्षण के कारण हेलीकॉप्टर स्वयं नोदक की विपरीत दिशा में घूमेगा।

प्रश्न 7. घूर्णन गतिज ऊर्जा के आधार पर जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित कीजिए। (UPBTE 2001)

उत्तर किसी पिण्ड के किसी घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व-आघूर्ण का मान उसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा के दोगुने के बराबर होता है, यदि वह पिण्ड उस अक्ष के परित: एकांक कोणीय वेग से घूम रहा है।

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \text{ या } I = \frac{2K_{rot}}{\omega^2}$$

$$I = 2K_{rot} \qquad (\because \omega = 1)$$

प्रश्न 8. घूर्णन त्रिज्या क्या होती है?

उत्तर यदि किसी पिण्ड का समस्त द्रव्यमान किसी एक बिन्दु पर इस प्रकार केन्द्रित मान लिया जाए कि इस बिन्दु की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी इतनी हो कि दूरी के वर्ग को पिण्ड के द्रव्यमान से गुणा करने पर पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाए तो इस दूरी को घूर्णन त्रिज्या कहते हैं।

प्रश्न 9. एक दृढ़ पिण्ड जोकि प्रारम्भ में विरामावस्था में है, 3.0 रेडियन/से^{2} के कोणीय त्वरण से 20 सेकण्ड तक घूमता है। कोणीय विस्थापन ज्ञात कीजिए।

ITI Question Bank.com

हल ज्ञात है, $\omega_0 = 0, \alpha = 3$ रेडियन/से^{2}, $t = 20$ सेकण्ड, $\theta = ?$

सूत्र, $$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \text{ से,}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \times 3 \times 20 \times 20$$

अतः कोणीय विस्थापन $\theta = \mathbf{600}$ **रेडियन**

10. 5 किग्रा द्रव्यमान के पिण्ड को 4 मीटर लम्बी रस्सी से बाँधकर घुमाया जाता है। पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $m = 5$ किग्रा, $r = 4$ मी

$$I = mr^2$$

$$I = 5 \times 4 \times 4$$

$I = \mathbf{80}$ **किग्रा-मी^{2}**

11. घूर्णन गतिज ऊर्जा के समीकरण लिखिए।

उत्तर घूर्णन गतिज ऊर्जा के समीकरण निम्नलिखित हैं

(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$, (ii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ तथा (iii) $\omega^2 = \omega_0 + 2\alpha\theta$

12. जड़त्व आघूर्ण का व्यावहारिक उपयोग समझाइए।

उत्तर साइकिल, स्कूटर, मोटरसाइकिल आदि में पहिए का जड़त्व आघूर्ण बढ़ाने के लिए सम्पूर्ण पदार्थ पहिए के घेरे पर होता है। ऐसा इसलिए क्योंकि जब हम साइकिल आदि में पैडल मारना बन्द कर देते हैं तो साइकिल का पहिया, अधिक जड़त्व आघूर्ण के कारण कुछ समय तक घूमता रहता है।

13. डिस्क के व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा?

उत्तर $I = \frac{1}{4}MR^2$.

14. इलेक्ट्रॉन ($m = 9 \times 10^{-31}$ किग्रा) किसी परमाणु के नाभिक के चारों ओर 0.2 Å त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में 2×10^6 मी/से की चाल से घूमता है। इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $m = 9.0 \times 10^{-31}$ किग्रा, $r = 0.2\text{Å} = 0.2 \times 10^{-10}$ मी

$$v = 2 \times 10^6 \text{ मी/से}$$

$\because$ कोणीय संवेग $J = I \times \omega$

$$J = (mr^2)\left(\frac{v}{r}\right) \qquad (\because v = r \times \omega \text{ तथा } I = mr^2)$$

या $$J = mvr = 9 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^6 \times 0.2 \times 10^{-10}$$

$= \mathbf{3.6 \times 10^{-35}}$ **किग्रा-मी^{2}/से**

15. एक बेलन के अपने अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण का सूत्र लिखिए। (UPBTE, Sem-I, 2016)

उत्तर $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

16. जड़त्व आघूर्ण और घूर्णन त्रिज्या में सम्बन्ध लिखिए। (UPBTE, Sem-I, 2016)

उत्तर यदि दूरी K का वर्ग तथा द्रव्यमान M का गुणनफल पिण्ड की पूर्व अवस्था के जड़त्व आघूर्ण के बराबर हो तो वह दूरी ही पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या या परिभ्रमण त्रिज्या कहलाती है।

$$MK^2 = I \quad \text{या} \quad K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

प्रश्न 1. बल आघूर्ण तथा जड़त्व आघूर्ण के बीच सम्बन्ध का सूत्र स्थापित कीजिए।

Derive the relationship formula between moment of force and moment of inertia.

उत्तर **बल आघूर्ण तथा जड़त्व आघूर्ण के बीच सम्बन्ध** माना कोई पिण्ड किसी घूर्णन अक्ष के परितः अचर कोणीय त्वरण α से घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के सभी कणों का कोणीय त्वरण α ही होगा, परन्तु रेखीय त्वरण अलग-अलग होंगे। माना कि पिण्ड के एक कण का द्रव्यमान m_1 है तथा इसकी घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है। तब इस कण का रेखीय त्वरण $a_1 = r_1\alpha$

इस कण पर लगने वाला बल, F_1 = द्रव्यमान × त्वरण

$$F_1 = m_1 \times a_1 = m_1 \times (r_1\alpha) = m_1 r_1 \alpha$$

बल F_1 का घूर्णन अक्ष के परितः

$$\text{आघूर्ण} = \text{बल} \times \text{दूरी}$$

$$= F_1 \times r_1$$

$$= (m_1 r_1 \alpha) \times r_1 = m_1 r_1^2 \alpha$$

इसी प्रकार, यदि पिण्ड के अन्य कणों के द्रव्यमान $m_2, m_3, \ldots$ हैं तथा उनकी घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमशः $r_2, r_3, \ldots$ हैं, तो उन पर कार्य करने वाले बल-आघूर्ण क्रमशः $m_2 r_2^2 \alpha$ तथा $m_3 r_3^2 \alpha \ldots$ होंगे।

अतः पिण्ड पर कार्यकारी सम्पूर्ण बल-आघूर्ण τ पिण्ड के सभी कणों पर कार्य करने वाले बलों के आघूर्णों के योग के बराबर होगा।

ITI Question Bank.com

$\therefore$ $$\tau = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha + \ldots$$
$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\alpha = (\Sigma m r^2)\alpha$$

परन्तु $\Sigma m r^2$ = पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I

अत: $$\tau = I \times \alpha$$

अर्थात् बल-आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण $(\because \omega = 1)$

अ 2. कोणीय संवेग (L) तथा बल आघूर्ण (τ) की परिभाषा दीजिए। इनके मात्रक तथा विमा बताइए। सम्बन्ध $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ को सिद्ध कीजिए। (UPBTE 2009)

Define angular momentum (L) and moment of force (τ). Describe their units and dimensions. Prove the relation $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

अथवा **कोणीय संवेग की परिभाषा दीजिए तथा इसका S.I. मात्रक बताइए।** (UPBTE, Sem-I, 2016)

Define angular momentum and give its S.I. unit.

उत्तर **कोणीय संवेग** घूर्णन गति में पिण्ड के विभिन्न अवयवी कणों के रेखीय संवेगों के घूर्णन अक्ष के परित: आघूर्णों का योग उस अक्ष के परित: पिण्ड का कोणीय संवेग कहलाता है।

यह निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त किया जाता है

कोणीय संवेग = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग

अर्थात् $$L = I \times \omega$$

कोणीय संवेग का मात्रक = किग्रा-मी^{2}-से$^{-1}$ तथा

कोणीय संवेग की विमा = $[ML^2T^{-1}]$

बल आघूर्ण बल के परिमाण तथा घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया-रेखा की लम्बवत् दूरी के गुणनफल को बल आघूर्ण कहते हैं।

इसे τ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\tau = F \times r$$

बल आघूर्ण का मात्रक 'न्यूटन-मीटर' तथा विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है।

बल आघूर्ण तथा कोणीय संवेग में सम्बन्ध

बल आघूर्ण = कोणीय संवेग परिवर्तन की समय दर

अर्थात् $$c = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

माना दी हुई अक्ष के परित: घूर्णन गति कर रहे पिण्ड का कोणीय वेग ω तथा कोणीय संवेग L है। माना इस पर τ बल आघूर्ण आरोपित करने पर इसमें उत्पन्न कोणीय त्वरण α है।

अत: बल आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण

अर्थात् $$\tau = I\alpha, \quad \text{परन्तु } \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$\therefore$ $$\tau = I\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta I\omega}{\Delta t}$$ $(\because I$ नियत है$)$

$\therefore$ $$\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$ $(\because L = I\omega)$

अर्थात् कोणीय संवेग परिवर्तन की दर बल आघूर्ण के बराबर होती है।

जब $C = 0$, तो $\frac{\Delta L}{\Delta t} = 0$ अर्थात् $\Delta L = 0$ अर्थात् J = नियतांक

ITI Question Bank.com

10. 1.0 किग्रा द्रव्यमान और 0.2 मी त्रिज्या की एक वृत्ताकार चकती 4 रेडियन/सेकण्ड के कोणीय वेग से घूम रही है। गणना कीजिए (UPBTE 2014)

(i) घूर्णन गतिज ऊर्जा, (ii) 5 सेकण्ड में एकसमान रूप से इसे रोकने के लिए आवश्यक बलयुग्म

A circular disc of mass 1 kg and radius 0.2 m is revolving with an angular velocity of 4 radian/sec. Evaluate (i) Rotating kinetic energy, (ii) Required couple of force to stop this after 5 second.

हल चकती का द्रव्यमान $(M) = 100$ किग्रा, चकती की त्रिज्या $(R) = 0.2$ मी, चकती का कोणीय वेग $(\omega) = 4$ रेडियन/सेकण्ड

(i) वृत्ताकार चकती की घूर्णन गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} I\omega^2$ $\left[\because I = \frac{1}{2} MR^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} MR^2\omega^2\right] = \frac{1}{4} MR^2\,\omega^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 \times (0.2)^2 \times (4)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.04 \times 16$$

$$= 4 \times 0.04 = \mathbf{1.6 \times 10^{-3}} \text{ जूल}$$

(ii) प्रारम्भिक कोणीय वेग $(\omega_0) = 4$ रेडियन/सेकण्ड

अन्तिम कोणीय वेग $(\omega) = 0$

यदि कोणीय त्वरण α हो, तो सूत्र $\omega = \omega_0 - \alpha t$ से,

$$0 = 4 - 5 \times \alpha$$

$$5\alpha = 4$$

$\Rightarrow$ $\alpha = 0.8$ रेडियन/सेकण्ड^2

चकती का जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (0.2)^2 = 0.02$ किग्रा-मी^{2}

अत: आवश्यक बलयुग्म, $\tau = I \cdot \alpha = 0.02 \times 0.8 = \mathbf{1.6 \times 10^{-2}}$ **न्यूटन-मीटर**

11. घूर्णन गतिज ऊर्जा के लिए व्यंजक का निगमन कीजिए।

Derive an expression for rotational kinetic energy.

उत्तर **घूर्णन गतिज ऊर्जा** माना कोई पिण्ड किसी अक्ष के परित: एकसमान कोणीय वेग ω से घूर्णन गति कर रहा है। इस पिण्ड के सभी अवयवी कणों का कोणीय वेग ω ही होगा, जबकि उनके रेखीय वेग भिन्न-भिन्न होंगे। माना घूर्णन अक्ष से $r_1, r_2, r_3, \ldots$ दूरियों पर स्थित पिण्ड के अवयवी कणों के द्रव्यमान क्रमश: $m_1, m_2, m_3, \ldots$ तथा इनके रेखीय वेग क्रमश: $v_1, v_2, v_3, \ldots$ हैं।

ITI Question Bank.com

चूँकि प्रत्येक कण का रेखीय वेग, कण की घूर्णन-अक्ष से दूरी तथा कण के कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है, अत: m_1 द्रव्यमान के कण का रेखीय वेग $v_1 = r_1 \times \omega$

इस कण की रेखीय गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m_1 \times v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (r_1\omega)^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2\omega^2$

इसी प्रकार अन्य कणों की रेखीय गतिज ऊर्जाएँ क्रमश: $\frac{1}{2} m_2 r_2^2\omega^2, \frac{1}{2} m_3 r_3^2\omega^2, +\ldots$ होंगी।

पिण्ड के सभी अवयवी कणों की रेखीय गतिज ऊर्जाओं का योग ही घूर्णन गति करते पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा होगी तथा यही पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा कहलाती है। अत: पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_{rot} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2\omega^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\,\omega^2 = \frac{1}{2} (\Sigma m r^2)\omega^2$$

परन्तु, $\Sigma(mr^2)$ = घूर्णन-अक्ष के परित: पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण I

∴ घूर्णन गतिज ऊर्जा, $K_{rot} = \mathbf{\frac{1}{2} I\omega^2}$

12. तीन कण (प्रत्येक का द्रव्यमान 10 ग्राम) एक 5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों पर स्थित हैं। इस समुदाय का, त्रिभुज के एक कोने से होकर जाने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। (UPBTE 2000)

Three particles (each of mass 10 gm) are situated on the vertices of a equilateral triangle of side 5 cm. Find out the moment of inertia w.r.t. the axis passes through a corner of triangle and the perpendicular axis of the base or triangle.

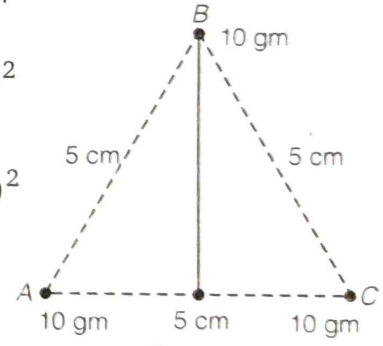
उत्तर माना ΔABC के तीनों कोणों A, B तथा C पर क्रमश: 10, 10 ग्राम के भार रखे हैं तथा बिन्दु B से होकर गुजरने वाले एवं त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

B के परित: A पर रखे कण का जड़त्व आघूर्ण,

$$I_A = (10^{-2} \text{ किग्रा})\,(5 \times 10^{-2} \text{ मी})^2$$
$$= 25 \times 10^{-6} \text{ किग्रा-मी}^2$$

B के परित: C पर रखे कण का जड़त्व आघूर्ण, $I_C = (10^{-2} \text{ किग्रा})\,(5 \times 10^{-2} \text{ मी})^2$
$$= 25 \times 10^{-6} \text{ किग्रा-मी}^2$$

B के परित: B पर रखे कण का जड़त्व आघूर्ण, $I_B = 0$ (शून्य)



चित्र 5.1

अत: इस समुदाय का कुल जड़त्व आघूर्ण, $I = I_A + I_B + I_C$

$$= 25 \times 10^{-6} + 0 + 25 \times 10^{-6}$$
$$= 50 \times 10^{-6} = \mathbf{5 \times 10^{-5}} \text{ किग्रा-मी}^2$$

13. जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धी समकोणिक अक्षों की प्रमेय का उल्लेख कीजिए तथा उसको सिद्ध कीजिए।

Explain and prove the theorem of perpendicular axes related to the moment of inertia.

उत्तर

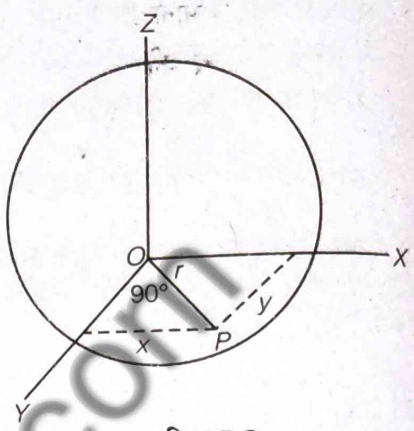
जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धी समकोणिक अक्षों की प्रमेय

कथन किसी समतल पटल तल में ली गई दो परस्पर लम्बवत् अक्षों OX व OY के परित: जड़त्व-आघूर्णों का योग, इन अक्षों के कटान-बिन्दु O से जाने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत् अक्ष OZ के परित: जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है। अत: पटल का अक्ष OZ के परित: जड़त्व आघूर्ण $I_z = I_x + I_y$

जहाँ, I_x तथा I_y पटल के क्रमश: अक्ष OX व OY के परित: जड़त्व आघूर्ण हैं।

ITI QuestionBank.com

उपपत्ति चित्र 5.2 में एक पटल दिखाया गया है, जिसके तल में दो परस्पर लम्बवत् अक्ष OX तथा OY ली गई हैं। अक्ष OZ, पटल के तल के अभिलम्बवत् है तथा OX व OY के कटान-बिन्दु O से गुजरती है। माना कि अक्ष OZ से r दूरी पर m द्रव्यमान का एक कण P है। इस कण का अक्ष OZ के परित: जड़त्व आघूर्ण mr^2 होगा। अत: पूरे पटल का अक्ष OZ के परित: जड़त्व आघूर्ण $I_z = \Sigma mr^2$



चित्र 5.2

परन्तु, $r^2 = x^2 + y^2$, जहाँ x व y, कण की क्रमश: अक्षों OY व OX से दूरियाँ हैं।

$$\therefore \quad I_z = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$$

परन्तु Σmx^2 पटल का अक्ष OY के परित: जड़त्व-आघूर्ण I_y है; तथा Σmy^2, पटल का अक्ष OX के परित: जड़त्व-आघूर्ण I_x है।

$$\therefore \quad I_z = I_y + I_x \quad \text{अथवा}$$

$$I_z = I_x + I_y$$

14. जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धी समान्तर अक्षों की प्रमेय का उल्लेख कीजिए तथा उसको सिद्ध कीजिए। (UPBTE, Sem-I, 2016)

Explain and prove the theorem of parallel axes related to the moment of inertia.

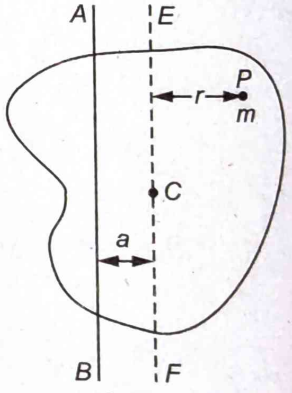
उत्तर

जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धी समान्तर अक्षों की प्रमेय

कथन किसी पिण्ड का किसी अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण (I), उस पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र (centre of mass) से होकर जाने वाली समान्तर अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा पिण्ड के द्रव्यमान व दोनों अक्षों के बीच की लम्बवत्-दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है अर्थात् $I = I_{cm} + Ma^2$

जहाँ, M पिण्ड का द्रव्यमान है तथा a दोनों अक्षों के बीच की लम्बवत् दूरी है।

उपपत्ति माना कि एक समतल पटल (plane lamina) का द्रव्यमान-केन्द्र C है (चित्र 5.3)। माना कि पटल का पटल के तल में स्थित अक्ष AB के परित: जड़त्व आघूर्ण I है तथा इसके द्रव्यमान-केन्द्र C से गुजरने वाली 'समान्तर' अक्ष EF के परित: जड़त्व आघूर्ण I_{cm} है। माना कि अक्ष में EF तथा AB के बीच लम्बवत्-दूरी a है।



चित्र 5.3

माना कि अक्ष EF से r दूरी पर m द्रव्यमान का एक कण P है। स्पष्ट है कि कण P की अक्ष AB से दूरी $(r + a)$ होगी तथा इस अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $m(r + a)^2$ होगा।

अत: पूरे पटल का अक्ष AB के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \Sigma m (r + a)^2 = \Sigma m (r^2 + a^2 + 2ar)$$

$$= \Sigma mr^2 + \Sigma ma^2 + \Sigma 2mar$$

चूँकि a नियत है; इसे Σ से बाहर ले सकते हैं।

$$\therefore \quad I = \Sigma mr^2 + a^2 \Sigma m + 2a\Sigma mr \quad \text{....(i)}$$

अब, $\Sigma mr^2 = I_{cm}$, पटल का द्रव्यमान-केन्द्र C से गुजरने वाली अक्ष EF के परित: जड़त्व आघूर्ण; $a^2 \Sigma m = a^2 M$, जहाँ M पटल का कुल द्रव्यमान है तथा $\Sigma mr = 0$, क्योंकि किसी पटल के समस्त कणों का पटल के द्रव्यमान-केन्द्र में से गुजरने वाली अक्ष के परित: आघूर्णों का योग शून्य होता है। ये मान समी (i) में रखने पर,

$$I = I_{cm} + Ma^2$$

15. m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो कणों के बीच की दूरी R है। इस निकाय के द्रव्यमान केन्द्र (centre of mass) से गुजरने वाले एवं द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परित: निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। यदि निकाय f आवृत्ति से घूमता है तो इसका कोणीय संवेग ज्ञात कीजिए।

The distance between the two particles of mass m_1 and m_2 is R. Find the moment of inertia w.r.t. the perpendicular axis of the line which joins the masses and passes through centre of mass of the body. If body revolves with a frequency f then find its angular momentum.

ITIQuestionBank.com

हल (i) माना द्रव्यमान केन्द्र (centre of mass) C से दोनों कणों m_1 व m_2 की दूरियाँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं।

द्रव्यमान-केन्द्र की परिभाषा से,

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad ...(i)$$

तथा $$r_1 + r_2 = R$$

$\therefore$ $$r_1 = R - r_2$$

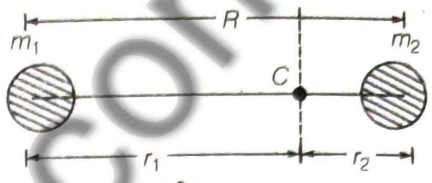
या $$r_1 = R - \frac{m_1 r_1}{m_2}$$

या $$m_2 r_1 = m_2 R - m_1 r_1$$

या $$r_1 (m_1 + m_2) = m_2 R$$

$\therefore$ $$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot R \quad ...(ii)$$

इसी प्रकार, $$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot R \quad ...(iii)$$



चित्र 5.4

अब द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा के लम्बवत् तथा द्रव्यमान-केन्द्र C से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$= m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 R^2$$

(r_1 तथा r_2 के मान रखने पर)

$$= \frac{m_1 m_2^2 R^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 R^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 R^2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}$$

या $$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . R^2$$

(ii) कोणीय संवेग, $$J = I \cdot \omega = I \cdot 2\pi f$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot R^2 \cdot 2\pi f = \mathbf{2\pi f \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} R^2}$$

16. 50 ग्राम द्रव्यमान का एक कण, 1.0 मी त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में घूमते हुए 15/π चक्कर प्रति सेकण्ड लगाता है। गणना कीजिए

(i) कण का त्वरण

(ii) एक चौथाई चक्कर लगाने में संवेग-परिवर्तन

A particle of mass 50 g is revolving 15/π round/sec in the horizontal circle of radius 1.0 m. Evaluate (i) acceleration of particle, (ii) change in momentum in $\frac{1}{4}$ round.

हल दिया है, $m = 50$ ग्राम $= 50 \times 10^{-3}$ किग्रा, $r = 1.0$ मी, $n = 15/\pi$

$$\omega = 2\pi n = 2 \times \pi \times \frac{15}{\pi} = 30 \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

(i) कण का त्वरण, $$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = 1 \times (30)^2$$

$$a = \mathbf{900 \text{ मी/से}^2}$$

ITI Question Bank.com

(ii) एक चौथाई चक्कर लगाने में या 90° घूमने में संवेग परिवर्तन,

$$\Delta p = \sqrt{p^2 + p^2}$$

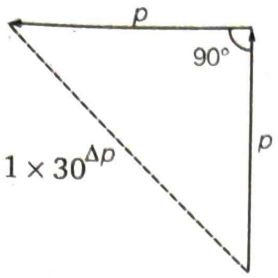
$$= p\sqrt{2}$$

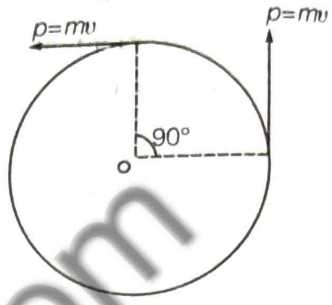
$\because$ $$p = mv = mr\omega = 50 \times 10^{-3} \times 1 \times 30$$

$$= 1.5 \text{ किग्रा-मी/से}$$

$\therefore$ $$\Delta p = p\sqrt{2} = 1.5 \times \sqrt{2}$$

$$\Delta p = \mathbf{2.12 \text{ किग्रा-मी/से}}$$





चित्र 5.5

17. रॉकेट प्रक्षेपण में निहित सिद्धान्त की व्याख्या कीजिए। **(UPBTE 2001)**

Explain the principle of Rocket Launching.

उत्तर रॉकेट प्रक्षेपण संवेग संरक्षण के सिद्धान्त पर आधारित है। रॉकेट में समय के अनुसार द्रव्यमान में परिवर्तन ईंधन के जलने के कारण गैसों के जेट से निकलने के कारण होता है। गर्म गैसों के जेट से रॉकेट पर बल लगता है, परिणामस्वरूप रॉकेट आगे बढ़ता है; क्योंकि गर्म गैसें पीछे की ओर एक संवेग प्राप्त करती हैं तथा रॉकेट उतना ही संवेग आगे की ओर प्राप्त करता है जिसको निम्न प्रकार समझा जा सकता है

माना एक रॉकेट पृथ्वी से दूर ऊपर की ओर जा रहा है तथा समय $t = 0$ पर उसका द्रव्यमान m_0 है तथा वह V_0 वेग से पृथ्वी के सापेक्ष गति कर रहा है। कुछ समय पश्चात् माना $t = t$ पर, रॉकेट का वेग V तथा द्रव्यमान m है। चूँकि समय t में कुछ ईंधन जल चुका है। अत: $m < m_0$ तथा $V = V_0$। पुन: माना समय dt में ईंधन के dm द्रव्यमान के सापेक्ष रॉकेट V_g वेग से गैसों को छोड़ता है। रॉकेट के m द्रव्यमान का संवेग, रॉकेट के द्रव्यमान $(m - dm)$ एवं गैसों के द्रव्यमान dm के संवेग के योग के बराबर होना चाहिये।

$$mV = (m - dm)(V + dV) + dm(-V_g) \quad \text{...(i)}$$

V_g नीचे की ओर है, अत: – चिह्न दिया गया है, जबकि V रॉकेट का वेग ऊपर की ओर है।

या $$mV = mV + mdV - Vdm - dm \cdot dV - V_g\, dm$$

dm, dV बहुत छोटी राशियाँ हैं, अत: $dmdV$ और भी छोटा होगा, अत: $dmdV$ गुणनफल को छोड़ने पर

$$mdV = (V_g + V)dm \quad \text{...(ii)}$$

गर्म गैसों का रॉकेट के सापेक्ष वेग $u_r = -(V_g + V)$ है।

अत: समी (ii) से, $$mdV = -u_r d_m \quad \text{...(iii)}$$

या $$dV = -u_r \frac{dm}{m} \quad \text{...(iv)}$$

रॉकेट का वेग समी (iv) के समाकलन के लिये समय $t = 0$ पर,

$$m = m_0, \quad V = V_0$$

तथा $$t = t \text{ पर } m = m \text{ एवं } V = V$$

$\therefore$ $$\int_{V_0}^{V} dV = -u_r \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$V - V_0 = -u_r \; [\log_e m - \log_e m_0]$$

अथवा $V = V_0 + u_r \log_e \frac{m_0}{m}$ जोकि समय t पर रॉकेट का वेग है। यदि रॉकेट की गति विरामावस्था में होती है $(V_0 = 0)$, तो

$$V = u_r \log_e \frac{m_0}{m}$$

18. 1.0 किग्रा द्रव्यमान का एक पिण्ड 2.0 मी व्यास के वृत्ताकार पथ पर 31.4 सेकण्ड में 10 चक्कर की दर से घूर्णन कर रहा है। पिण्ड के (i) कोणीय संवेग तथा (ii) घूर्णन गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए।

An object of mass 1.0 kg is revolving at a rate of 10 rounds in 31.4 seconds in a circular path of 2.0 m diameter. Evaluate (i) angular momentum and (ii) rotating kinetic energy of an object.

ITI QuestionBank.com

हल पिण्ड का द्रव्यमान $m = 1.0$ किग्रा तथा पिण्ड की घूर्णन अक्ष से दूरी $r = 2.0/2 = 1.0$ मीटर।

$\therefore$ पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $I = mr^2 = (1.0 \text{ किग्रा}) \times (1.0 \text{ मी})^2 = 1.0$ किग्रा-मी^{2}

पिण्ड का कोणीय वेग $\omega = 2\pi n$, जहाँ n प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या है। यहाँ $n = 10/31.4$

$$\omega = 2 \times 3.14 \times (10/31.4) = 2 \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

(i) कोणीय संवेग $J = I\omega = 1.0$ किग्रा-मी$^2 \times 2$ रेडियन/सेकण्ड $= 2.0$ किग्रा-मी^{2}/से

(ii) पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 1.0 \times (2)^2 = \mathbf{2.0} \text{ जूल}$$

प्रश्न 19. कोणीय संवेग को परिभाषित कीजिए। कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त क्या है? एक उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए। (UPBTE 2001)

Define angular momentum. What is the principle of conservation of angular momentum? Express it with one example.

अथवा **कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त को लिखिए।**

Write the principle of conservation of angular momentum.

उत्तर **कोणीय संवेग** यदि कोई पिण्ड किसी अक्ष के परित: घूम रहा है तो उस अक्ष के परित: पूरे घूमते पिण्ड के रेखीय संवेगों के आघूर्णों के योग को उस पिण्ड का उस अक्ष के परित: कोणीय संवेग कहते हैं। इसे J से प्रदर्शित किया जाता है।

$$J = \Sigma mr^2\omega = I\omega$$

जहाँ, $I =$ जड़त्व आघूर्ण तथा $\omega =$ कोणीय वेग

कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त इस नियम के अनुसार यदि किसी अक्ष के परित: घूमते हुये किसी पिण्ड पर यदि कोई बाहरी बल-आघूर्ण (torque) कार्य नहीं करता है तो उस पिण्ड का कोणीय संवेग स्थिर (constant) रहता है। इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि ऊर्जा न तो उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है, बल्कि इसे एक रूप से दूसरे रूप में स्थानान्तरित किया जा सकता है।

$$C \cdot dt = I \cdot d\omega \Rightarrow C = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow C = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

अर्थात् बल आघूर्ण (torque), कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

यदि $C = 0$ (zero) अर्थात् पिण्ड पर कोई बाहरी बल आघूर्ण कार्य नहीं करता है, तब $\frac{d\omega}{dt}$ या $\frac{d(I\omega)}{dt}$ भी शून्य के बराबर होगा। अत: कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर स्थिर रहती है। इसे 'J' से प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरणतया, जब कोई पत्थर किसी डोरी से बँधा होता है तथा डोरी का दूसरा सिरा हाथ में होता है और इसे हाथ से घुमाते हैं। अब यदि इस पत्थर के घुमाव को रोकने के लिये, कोई बल लगाते हैं या कहें कि बाहरी बल आघूर्ण (torque) को हटाते हैं तो डोरी हाथ में लिपटने लगती है, क्योंकि जब ऐसा करने से हाथ तथा पत्थर के बीच की दूरी कम होती है तो इसके घुमाव के अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण भी कम हो जाता है जिसके फलस्वरूप, इसका कोणीय वेग उसी अनुपात में बढ़ जाता है।

प्रश्न 20. 10 किग्रा द्रव्यमान तथा 0.4 मी व्यास की एक रिंग पृथ्वी पर 2100 चक्कर प्रति मिनट के कोणीय वेग से लुढ़क रही है। घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा कुल गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। रिंग की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा में कितने प्रतिशत घूर्णन ऊर्जा है?

A ring of mass 10 kg and diameter 0.4 m is rolling on the earth with an angular velocity of 2100 round/minute. Find the rotating kinetic energy and total kinetic energy. How much percentage of rotating kinetic energy is present in the whole kinetic energy of a ring?

ITI Question Bank.com

हल दिया है, रिंग का द्रव्यमान, $M = 10$ किग्रा,

रिंग की त्रिज्या R = व्यास/2 = 0.4 मी/2 = 0.2 मी

प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या, $n = \frac{2100}{60} = 35$ चक्कर

$\therefore$ रिंग का कोणीय वेग, $\omega = 2\pi n = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 = 220$ रेडियन/सेकण्ड

घूर्णन गतिज ऊर्जा, $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2) \times \omega^2$

$= \frac{1}{2}$ 10 किग्रा $\times (0.2)^2 \times (220$ रेडियन/सेकण्ड$)^2$

$= 9680$ जूल

कुल गतिज ऊर्जा, K = घूर्णन गतिज ऊर्जा + स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा

$= \frac{1}{2} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$

$= \frac{1}{2} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2} M(R\omega)^2 = MR^2\omega^2$

$= 10$ किग्रा $\times (0.2$ मी$)^2 \times (220$ रेडियन/सेकण्ड$)^2 =$ **19360 जूल**

$\therefore$ सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा में घूर्णन गतिज ऊर्जा का प्रतिशत

$= \frac{K_{rot}}{K} \times 100 = \frac{9680 \text{ जूल}}{19360 \text{ जूल}} \times 100 =$ **50%**

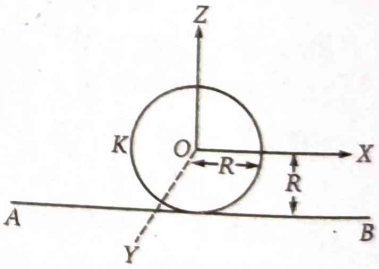
21. 'जड़त्व आघूर्ण' व 'घूर्णन त्रिज्या' की परिभाषा दीजिए। एक डिस्क का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I है। इसका जड़त्व आघूर्ण, परिधि से जाने वाली एक समान्तर अक्ष के परितः के पदों में ज्ञात कीजिए। (UPBTE 2011, 05)

Define moment of inertia and radius of gyration. A disc has moment of inertia I along its axis. Find its moment of inertia w.r.t. a parallel axis passing through the circumference.

अथवा **घूर्णन त्रिज्या की व्याख्या कीजिए।** (UPBTE 2001)

Explain radius of gyration.

उत्तर **जड़त्व आघूर्ण** जब एक पिण्ड एक अक्ष के परितः घूमता है तो इसकी प्रवृत्ति, इसके घूर्णन में परिवर्तन का विरोध करने की होती है। पिण्ड का यह गुण जिसके कारण यह इस होने वाले घूर्णन में परिवर्तन का विरोध करता है, पिण्ड के घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण कहलाता है। इसे I से दर्शाया जाता है।



चित्र 5.6

घूर्णन त्रिज्या किसी पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या, दिये हुए अक्ष के परितः अक्ष से वह प्रभावी दूरी होती है जिस पर, यदि पिण्ड के समस्त द्रव्यमान को किसी एक बिन्दु पर केन्द्रित मान लें तो पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, दिये हुए अक्ष के परितः वही होगा जितना इसके द्रव्यमान के वास्तविक वितरण से प्राप्त होता है।

अतः यदि किसी पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, जिसका द्रव्यमान M से, I हो तब $I = MK^2$ जहाँ पर K पिण्ड की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या है, तब $K = \sqrt{I/M}$

चित्र के अनुसार, चकती के तल के लम्बवत् X-अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण जो चकती के केन्द्र O से गुजरता है,

$$I_Q = \frac{MR^2}{2} \quad \text{...(i)}$$

जहाँ पर, M = द्रव्यमान, R = अर्द्धव्यास

ITIQuestionBank.com

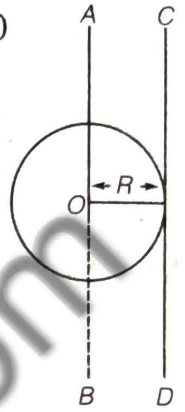
अब लम्बवत् अक्ष के प्रमेय से, $I_X + I_Y = I_Z$ ...(ii)

दोनों अक्ष X तथा Y के परित: जड़त्व आघूर्ण बराबर होंगे।

तथा $I_X = I_Y$

अत: समी (ii) में, $I_Y = I_X$ तथा $I_Z = I_Q$ रखने पर,

$$I_Y + I_X = I_Q \text{ या } I_X = \frac{I_Q}{2}$$



चित्र 5.7

अब समान्तर अक्ष प्रमेय से, $I_{AB} = I_G + Mh^2$

अब प्रश्न के अनुसार, $I_G = I_X = \frac{I_Q}{2}$ तथा $h = R$

तब $I_{AB} = \frac{I_Q}{2} + MR^2 = \frac{I_Q}{2} + 2I_Q$ [समी० (i) से]

$$I_{AB} = \frac{5}{2} I_Q$$

प्रश्नानुसार, समान्तर अक्ष की प्रमेय से, $I = I_G + Mh^2$ $[\because h = R]$

$$I_{CD} = I_{AB} + MR^2$$

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 \quad [\because I_{CD} = I_0 \text{ तथा } I_{AB} = \frac{MR^2}{2}]$$

अत: $I_0 = \frac{3MR^2}{2}$

22. क्षैतिज से 30° झुके हुए तल की लम्बाई 20 मी है। तल की चोटी से 5 किग्रा द्रव्यमान का एक गोला विरामावस्था से लुढ़कना प्रारम्भ करता है। यदि घर्षण आदि के कारण गोले की गतिज ऊर्जा का 20% भाग क्षय हो जाये तो तल के निम्नतम बिन्दु पर गोले के वेग की गणना कीजिए। (g = 9.8 मी/से^{2})

The length of the base inclined at an angle of 30° from the horizontal is 20 m. From the top of the surface, the sphere of 5 kg starts rolling from the rest. If the 20% of its kinetic energy decreased due to friction etc. then evaluate the velocity of sphere on the minimum point. (g = 9.8 m/s^2)

हल झुके हुए तल की ऊँचाई $(h) = BC = AC \sin 30° = 20 \times \frac{1}{2} = 10$ मी

गोले की उच्चतम बिन्दु C पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $= mgh = 5 \times 9.8 \times 10 = 490$ जूल

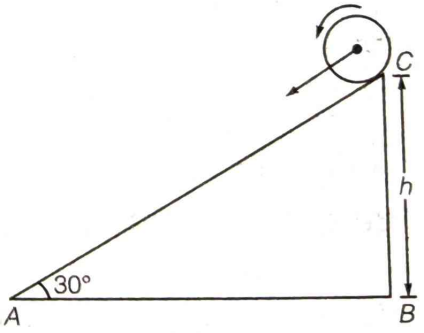
निम्नतम बिन्दु A पर गोले की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा = गोले की C पर स्थितिज ऊर्जा

= 490 जूल

घर्षण के कारण क्षय गतिज ऊर्जा = 490 जूल $\times \frac{20}{100}$ = 98 जूल

∴ निम्नतम बिन्दु A पर गतिज ऊर्जा = 490 जूल − 98 जूल

= 392 जूल



चित्र 5.8

यदि बिन्दु A पर गोले का वेग v तथा कोणीय वेग ω है, तब

$$K_{trans} + K_{rot} = 392 \text{ जूल}$$

∴ $$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 392$$

अथवा $$\frac{1}{m}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = 392$$

ITI Question Bank.com

अथवा
$$\frac{7}{10}mv^2 = 392$$
अथवा
$$v^2 = \frac{10}{7} \times \frac{392}{5} = 112$$
$$v = \mathbf{10.58} \text{ मी/से}$$

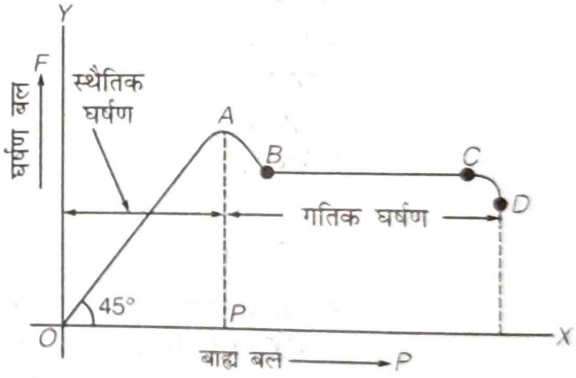
23. सीमान्त घर्षण के नियमों का उल्लेख कीजिए।
क्षैतिज मेज पर स्थित एक गुटके पर बढ़ता हुआ एक बल तब तक लगाया जाता है जब तक कि यह 2 सेमी/से वेग नहीं प्राप्त कर लेता। चित्र द्वारा दर्शाइए कि समय के साथ गुटके पर लगने वाला घर्षण बल किस प्रकार परिवर्तित होता है? (UPBTE 2013)

Explain the laws of terminal friction.
An increasing force is applied on a block which is placed on the horizontal table upto applied when its speed becomes 2 cm/s. Show with the help of figure that how the friction force on a block changes with time.

उत्तर **चरम/सीमान्त घर्षण** सम्पर्क में रखे दो रुक्ष पिण्डों के मध्य जब सापेक्ष गति उत्पन्न होने ही वाली होती है, तो उनके मध्य उत्पन्न घर्षण बल को चरम या सीमान्त घर्षण बल कहते हैं। इसका मान स्थैतिक घर्षण बल के अधिकतम मान के बराबर होता है।

चरम/सीमान्त घर्षण के नियम

1. सम्पर्क में रखे दो रुक्ष पिण्डों के सीमान्त सन्तुलन की दशा में (अर्थात् रुक्ष पिण्ड सापेक्ष गति करने ही वाले हों) उनके मध्य उत्पन्न चरम घर्षण बल F तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया R का अनुपात सदैव अचर रहता है तथा यह अनुपात घर्षण गुणांक कहलाता है। इसे μ से प्रदर्शित करते हैं।
   घर्षण (μ) = चरम घर्षण बल (F)/अभिलम्ब प्रतिक्रिया (R) = Constant
   $$\mu = F/R$$
   $$F = \mu R$$



चित्र 5.9 गुटके पर लगने वाले घर्षण बल में परिवर्तन

2. घर्षण गुणांक μ का मान रुक्ष पिण्डों के पदार्थ पर निर्भर करता है तथा इसका मान शून्य से 1 के बीच होता है।
   $\mu = 0$ (पूर्णत: चिकनी सतह)
   $\mu = 1$ (पूर्णत: खुरदरी सतह)
   $\mu < 1$ (व्यवहार में)
3. घर्षण गुणांक का मान दोनों रुक्ष पिण्डों की सम्पर्क सतह की रुक्षता या खुरदरेपन पर भी निर्भर करता है।
4. घर्षण गुणांक का मान सम्पर्क सतह के आकार या क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

24. गतिपाल पहिया (fly wheel) कितने प्रकार का होता है? गतिपाल पहिये के कार्य लिखिए।

How many types of fly wheel are there? Write the functions of fly wheel.

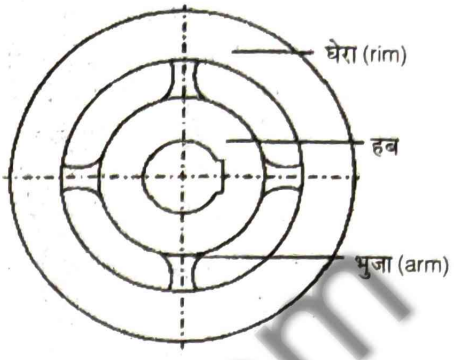
उत्तर **गतिपाल पहिये के प्रकार** यह पहिया मुख्यत: दो प्रकार का होता है

1. चकती के आकार में (Disc type)
2. घेरे के आकार में (Rim type)

चकती के आकार में पहिया एक अधिक भार वाली वृत्ताकार प्लेट ही होता है जिसके केन्द्र पर शाफ्ट लगाने के लिए छेद तथा कुँजी (key) लगाने का प्रबन्ध होता है।

ITI Question Bank.com

घेरे के आकार में पहिये का अधिकतर भार उसके घेरे पर होता है। इस घेरे को केन्द्र पर सीधी या वक्राकार भुजाओं द्वारा जोड़ा जाता है। ये भुजायें सामान्यतया आयताकार (rectangular) या दीर्घवृत्ताकार (elliptical) अनुप्रस्थ काट (cross-section) वाली होती हैं।



चित्र 5.10

गतिपाल पहिया ढलवाँ लोहे (cat iron) का बना होता है। छोटे पहिये को पूरा ही एकसाथ ढालते (casting) हैं, परन्तु बड़े पहिये को कुछ भागों में ढालकर, फिर इन भागों को बोल्ट द्वारा जोड़कर, पूरा पहिया बना लिया जाता है।

घेरेदार पहिया चकती पहिये की अपेक्षा अधिक प्रयोग में लाया जाता है, क्योंकि एक ही व्यास के लिए घेरेदार पहिये की विघूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) चकतीदार पहिये से अधिक होती है। चकतीदार पहिये में घेरेदार पहिये की अपेक्षा अधिक प्रतिबल (stress) उपजता है।

गतिपाल पहिये के कार्य पश्चाग्र इंजन से प्राप्त घुमाऊ-घूर्ण समान नहीं होता वरन् उतार-चढ़ाव वाला होता है जिससे इंजन की गति में भी उतार-चढ़ाव आ जाता है। इंजन के घुमाऊ-घूर्ण में उतार-चढ़ाव इंजन के प्रकार पर निर्भर करते हैं; (जैसे—भाप इंजन, पेट्रोल इंजन, गैस इंजन आदि)। **घुमाऊ-घूर्ण में ये उतार-चढ़ाव क्रैंक-शाफ्ट पर जोड़े गये क्रैंकों पर भी निर्भर करते हैं, जबकि गति में उतार-चढ़ाव इंजन के प्रयोग के ढंग पर निर्भर करते हैं।** इन उतार-चढ़ावों को कम करने के लिए ही गतिपाल पहिये का प्रयोग किया जाता है। गतिपाल पहिया क्रैंक-शाफ्ट पर लगाया जाता है। इस प्रकार, अब ऊर्जा का संचरण, इंजन से मशीन पर सीधे न होकर, गतिपाल पहिये के माध्यम से होता है। जिस समय इंजन से प्राप्त घुमाऊ-घूर्ण, मशीन द्वारा कार्य के लिए आवश्यक घुमाऊ-घूर्ण से अधिक होता है, उस समय यह पहिया अतिरिक्त घुमाऊ-घूर्ण को अपने में संचित या इकट्ठा कर लेता है तथा जब शाफ्ट पर प्राप्त घुमाऊ-घूर्ण कार्य के लिए आवश्यक घूर्ण से कम होता है, उस समय यह पहिया पहले संचित किये घुमाऊ-घूर्ण को त्यागता (release) है। **गतिपाल पहिये में घुमाऊ-घूर्ण को संचित करने का गुण उसके जड़त्व-घूर्ण** (moment of inertia) **के कारण होता है।**

25. गतिपाल पहिये की गतिज ऊर्जा के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

Derive an expression for kinetic energy of fly wheel.

उत्तर **गतिपाल पहिये की गतिज ऊर्जा** हम जानते हैं कि I जड़ता-घूर्ण वाला गतिपाल पहिया यदि ω कोणीय वेग से गतिमान हो, तो इसकी गतिज ऊर्जा निम्न प्रकार होगी

$$E = \frac{1}{2} \cdot I\omega^2$$

इस प्रकार, जब गतिपाल पहिये में ऊर्जा संचित की जायेगी, तो उसका वेग ω बढ़ेगा और जब पहिये द्वारा ऊर्जा खर्च की जायेगी अर्थात् किसी मशीन को अन्तरित होगी, तो उसका वेग घटेगा। क्योंकि गतिपाल पहिये द्वारा ऊर्जा संचित करने या खर्च करने में उसके वेग में परिवर्तन होना चाहिए, इसी बात का प्रयोग करते हुए, वेग तथा ऊर्जा परिवर्तनों की आवश्यक सीमाओं के आधार पर, गतिपाल पहिये के आवश्यक भार की गणना की जाती है।

गतिपाल पहिये के आवश्यक भार की गणना में हम इंजन के अन्य घूमते हुए भागों की घुमाऊ-जड़ता (rotary inertia) नगण्य मानेंगे।

माना कि

m = गतिपाल पहिये की संहति (mass), किग्रा (kg) में,

N_1 = इंजन के एक चक्र (cycle) में पहिये की अधिकतम गति, चक्कर प्रति मिनट (r.p.m.) में,

N_2 = इंजन के एक चक्र (cycle) में पहिये की न्यूनतम गति, चक्कर प्रति मिनट (r.p.m.) में,

K = गतिपाल पहिये की विघूर्णन-त्रिज्या (radius of gyration) मीटर में,

तथा $I = mK^2$, पहिये का संहति जड़ता-घूर्ण (mass moment of inertia) (उसके केन्द्र से होकर जाने वाली लम्ब अक्ष पर) किग्रा-मी^{2} में।

ITI Question Bank.com

अब, गतिपाल पहिये की N_1 गति पर ऊर्जा,

$$E_1 = \frac{1}{2} \times I\omega_1^2 \text{ N-m}$$

$$E_1 \text{ की इकाई} \rightarrow \text{kg-m}^2 \times \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \rightarrow \text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m} \rightarrow \text{N-m} \quad \left(\because 1\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{N}\right)$$

यहाँ, $\omega_1 = N_1$ गति पर पहिये का कोणीय वेग $= \frac{2\pi N_1}{60}$ रेडियन/सेकण्ड (rad/s)

अत:

$$E_1 = \frac{1}{2} \times I \times \left(\frac{2\pi N_1}{60}\right)^2 \text{ N-m}$$

फिर, गतिपाल पहिये की N_2 गति पर ऊर्जा,

$$E_2 = \frac{1}{2} \times I \times \omega_2^2 \qquad (\because \omega_2 = \text{पहिये का } N_2 \text{ पर कोणीय वेग})$$

$$= \frac{1}{2} \times I \times \left(\frac{2\pi N_2}{60}\right)^2 \text{ N-m}$$

अब, ऊर्जा का अधिकतम उतार-चढ़ाव (maximum fluctuation of energy), N-m में,

$$E_f = E_{\text{उ० च०}} = E_1 - E_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot I \times \frac{4\pi^2 N_1^2}{60^2} - \frac{1}{2} \cdot I \times \frac{4\pi^2 N_2^2}{60^2} = \frac{4\pi^2}{2 \times 60^2} \times I(N_1^2 - N_2^2)$$

$$= \frac{\pi^2}{900} \times I \frac{(N_1 + N_2)}{2}(N_1 - N_2), \quad \text{यदि } \frac{N_1 + N_2}{2} = N = \text{औसत}$$

गति

तब,

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{\pi^2}{900} \times I \times N \times (N_1 - N_2)$$

या

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{\pi^2}{900} \times mK^2 \times N \times (N_1 - N_2), \text{ N-m में}$$

या

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{\pi^2}{900} \times mK^2 \times (\text{औसत गति}) \times \text{गति में परिवर्तन, N-m में}$$

ITI Question Bank.com

28. m द्रव्यमान का एक कण क्षैतिज तल में समान चाल 'v' से वृत्तीय गति करता है। वृत्तीय पथ की त्रिज्या 'r' है। ज्ञात कीजिए कि आधे चक्कर में, (UPBTE 2016)

A particle of mass m is moving in a horizontal plane with a uniform velocity v in a circular motion. The radius of circular path is 'r'. Determine that in a half round,

(i) रेखीय एंव कोणीय संवेगों में परिवर्तन

(ii) अभिकेन्द्र बल में परिवर्तन

(iii) किया गया कार्य कितना होगा?

(i) Change in linear and angular momentum.

(ii) Change in centripetal force.

(iii) How much work has done?

उत्तर (i) कण का द्रव्यमान $= m$

कण का वेग $= v$, कण की त्रिज्या $= r$

माना आधे चक्कर में वेग-परिवर्तन $= \Delta v$

$$\Delta v = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}v$$

रेखीय संवेग में परिवर्तन $= m \times \Delta v = m \times \sqrt{2}\, v = \sqrt{2}mv$

अब कोणीय संवेग में परिवर्तन $\alpha \cdot \omega = \dfrac{\alpha \cdot v}{r} = \dfrac{\sqrt{2}mv}{r}$

(ii) अभिकेन्द्र बल में परिवर्तन $F = \dfrac{mv^2}{r}, = \dfrac{m(\sqrt{2}\, mv)^2}{r} \Rightarrow \boldsymbol{F = \dfrac{2m^3v^2}{r}}$

(iii) कण द्वारा किया गया कार्य $W = F \times d$ (जहाँ $d = 2r$)

$$W = \boldsymbol{m \cdot a \times 2r}$$

ITI Question Bank.com