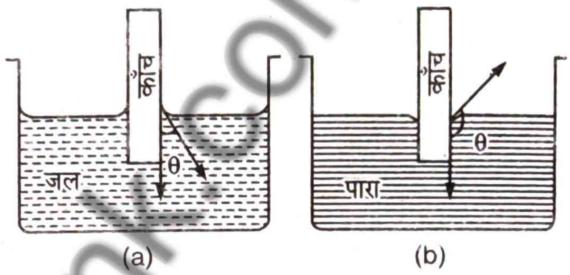
द्रव यांत्रिकी
Fluid Mechanics

प्रश्न 1. किसी द्रव के पृष्ठ-तनाव की परिभाषा दीजिए। **(UPBTE 2001)**

उत्तर किसी द्रव का पृष्ठ-तनाव वह बल है जो कि द्रव के पृष्ठ पर खींची गई किसी काल्पनिक रेखा की एकांक लम्बाई पर पृष्ठ के तल में तथा रेखा के लम्बवत् कार्य करता है। इसका S.I. मात्रक न्यूटन/मीटर है तथा इसकी विमा $[MT^{-2}]$ है।

प्रश्न 2. स्पर्श कोण क्या है?

उत्तर "द्रव व ठोस के स्पर्श बिन्दु से द्रव के पृष्ठ पर खींची गयी स्पर्श रेखा तथा ठोस के पृष्ठ पर द्रव के अन्दर की ओर खींची गयी स्पर्श रेखा के बीच बने कोण को उस ठोस व द्रव के लिए स्पर्श कोण कहते हैं।" चित्र 6.1 में स्पर्श कोण को 'θ' से प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6.1

प्रश्न 3 साबुन के घोल का पृष्ठ-तनाव 3.0×10^{-2} न्यूटन/मी है। इसका क्या अर्थ है?

उत्तर इसका अर्थ है कि साबुन के घोल के पृष्ठ पर खींची गयी काल्पनिक रेखा की एक मीटर लम्बाई पर इसके लम्बवत् 3.0×10^{-2} न्यूटन स्पर्शरेखीय बल कार्य करेगा।

प्रश्न 4. यदि द्रव को गर्म किया जाए तो केशनली में द्रव-स्तम्भ की ऊँचाई पर क्या प्रभाव पड़ेगा? **(UPBTE 2011, 16)**

उत्तर द्रव-स्तम्भ की ऊँचाई घट जाएगी।

प्रश्न 5. एक क्षैतिज पाइप में जल के प्रवाह का वेग 10.0 मी/से है। जल का वेग-शीर्ष ज्ञात कीजिए। ($g = 10$ मी/से)

उत्तर वेग-शीर्ष $= \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{10 \times 10}{2 \times 10} =$ **5 मीटर**

प्रश्न 6. यदि केशनली को थोड़ा झुकाया जाए तो केशनली में द्रव स्तम्भ पर क्या प्रभाव पड़ेगा? (UPBTE 2016)

उत्तर केशनली को थोड़ा झुकाने पर द्रव स्तम्भ की ऊँचाई पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

प्रश्न 7. जल के पृष्ठ तनाव को कैसे कम कर सकते हैं?

उत्तर गर्म करके या तेल डालकर।

प्रश्न 8. क्षैतिज पाइप के लिए बरनौली की प्रमेय लिखिए।

उत्तर $P + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ नियतांक

प्रश्न 9. इस्पात की सुई साबुन के घोल में डूब जाती है, परन्तु शुद्ध जल पर तैरती रहती है। कारण स्पष्ट कीजिए?

उत्तर साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव शुद्ध जल के पृष्ठ तनाव की तुलना में कम होता है, इसी कारण से इस्पात की सुई साबुन के घोल में डूब जाती है परन्तु शुद्ध जल पर तैरती रहती है।

प्रश्न 10. तेल से भरे दीपक में रुई की बत्ती क्यों जलाते हैं?

उत्तर क्योंकि रुई की बत्ती में असंख्य केशनलियाँ होती हैं जिनमें तेल सहज ही चढ़ जाता है।

प्रश्न 11. किसी द्रव के पृष्ठ पर खींची गई काल्पनिक रेखा की लम्बाई 5 सेमी है व कार्य करने वाला बल 10 न्यूटन का हो, तो द्रव का पृष्ठ तनाव ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $L = 5$ सेमी $= 5 \times 10^{-2}$ मी, $F = 10$ न्यूटन, $T = ?$

$\therefore \quad T = \frac{F}{L} \qquad \therefore \quad T = \frac{10}{5 \times 10^{-2}} = \mathbf{2 \times 10^{2}}$ **न्यूटन/मी**

प्रश्न 12. 0.08 सेमी व्यास वाली काँच की केशनली में द्रव 5 सेमी ऊँचाई तक चढ़ता है। द्रव का पृष्ठ तनाव ज्ञात कीजिए। द्रव का घनत्व 1×10^{3} किग्रा/मी^{3} है ($g = 9.8$ मी/से^{2})।

हल दिया है, $2r = 0.08$ सेमी, $h = 5$ सेमी $= 5 \times 10^{-2}$ मी

$\rho = 1 \times 10^{3}$ किग्रा/मी^{3}, $T = ?$

$\therefore \quad r = 0.04 \times 10^{-2}$ मी

$\because \quad T = \frac{rh\rho g}{2} = \frac{0.04 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^{3} \times 9.8}{2}$

$T = \mathbf{9.8 \times 10^{-2}}$ **न्यूटन/मी**

प्रश्न 13. किसी केशनली में जल 10 सेमी ऊँचा चढ़ता है। यदि केशनली को ऊर्ध्व से 45° झुका दें तो जल की ऊर्ध्व ऊँचाई कितनी होगी?

हल केशनली को 45° झुका देने से भी जल की ऊर्ध्व ऊँचाई में कोई परिवर्तन नहीं होगा। अत: जल की ऊर्ध्व ऊँचाई **10 सेमी** ही रहेगी।

प्रश्न 14. क्या, रेनॉल्ड संख्या का कोई मात्रक व विमा होती है?

उत्तर नहीं, रेनॉल्ड संख्या का कोई मात्रक व विमा नहीं होती है।

प्रश्न 15. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव कैसे बढ़ता है?

उत्तर किसी द्रव का ताप घटाये जाने पर या द्रव में अधिक घुलनशील पदार्थ मिलाने पर द्रव का पृष्ठ तनाव बढ़ जाता है।

प्रश्न 16. द्रवों में ऊष्मा का स्थानान्तरण किस विधि द्वारा होता है? **(UPBTE, Sem-I, 2016)**

उत्तर द्रवों में ऊष्मा का स्थानान्तरण संवहन विधि द्वारा होता है।

प्रश्न 17. धारा रेखीय प्रवाह में निरन्तरता का समीकरण लिखिए।

उत्तर $A_1 V_1 t = A_2 V_2 t$

$A_1 V_1 = A_2 V_2$

जहाँ : $V_1 . V_2$ बिन्दु $A_1 A_2$ पर द्रव कण के वेग हैं।

प्रश्न 1. पृष्ठ-तनाव पर किन बातों का प्रभाव पड़ता है? (UPBTE 2008)

What does effect on surface tension?

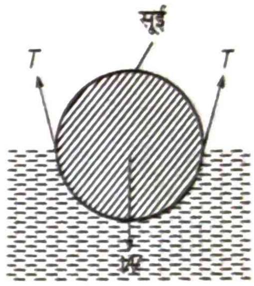
उत्तर पृष्ठ-तनाव पर निम्नलिखित बातों का प्रभाव पड़ता है

1. **ताप का प्रभाव** ताप बढ़ने से संसंजक बल का मान घट जाता है जिसके फलस्वरूप पृष्ठ-तनाव घट जाता है। क्रान्तिक ताप पर पृष्ठ-तनाव शून्य होता है।
2. **संदूषण का प्रभाव** यदि द्रव के तल पर धूल, कोई चिकनाई; जैसे— ग्रीस या तेल हो, तो इससे द्रव का पृष्ठ-तनाव घट जाता है।
3. **विलेय का प्रभाव** प्रयोगों से ज्ञात होता है कि जल का पृष्ठ-तनाव उसमें घोले गये पदार्थ व उसकी घुलनशीलता पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, जल में नमक घोलने पर जल का पृष्ठ-तनाव बढ़ जाता है। इसके विपरीत जल में साबुन घोलने पर जल का पृष्ठ-तनाव घट जाता है।

प्रश्न 2. लोहे का घनत्व जल की अपेक्षा अधिक होता है, फिर भी लोहे की पतली सूई जल पर तैर सकती है, क्यों?

The density of iron is higher than water even then a thin needle of iron can float on the water. Why?

उत्तर एक स्वच्छ पतली सूई को स्याही सोखते पर रखकर धीरे से पानी की सतह पर रखते हैं। सोखता कुछ देर तक पानी को सोखकर गीला होता रहता है और अन्त में डूब जाता है, परन्तु सूई पानी पर तैरती रहती है। इसका कारण जल का पृष्ठ-तनाव ही है। चित्र 6.2 में जल के पृष्ठ पर तैरती हुई सूई की अनुप्रस्थ-काट को दिखाया गया है। जल के पृष्ठ पर तैरती हुई सूई पर दो बल लगते हैं—(i) पृष्ठ-तनाव बल T, (ii) सूई का भार W। पृष्ठ-तनाव का परिणामी बल ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर लगता है जो सूई के भार W को सन्तुलित करता है जिसके फलस्वरूप सूई तैरती है।



चित्र 6.2

प्रश्न 3. एक केशनली में जल चढ़ता है, जबकि पारे का तल गिर जाता है, क्यों? पृष्ठ-तनाव पर—(i) अशुद्धता और (ii) ताप का क्या प्रभाव पड़ता है? (UPBTE 2003, 08)

The water rises in a capillary tube but mercury level falls down. Why? What is the effect of.

(i) Impurities and (ii) Temperature on the surface tension?

उत्तर केशनली में जल चढ़ता है, जबकि पारे का तल नीचे गिरता है, इसका मुख्य कारण स्पर्श कोण (contact angle) होता है। जिन द्रवों के लिए स्पर्श कोण, न्यून कोण (काँच को भिगोने वाला द्रव) होता है वे केशनली में ऊपर चढ़ते हैं, जबकि जिन द्रवों के लिए स्पर्श कोण, अधिक कोण (काँच को न भिगोने वाला द्रव) होता है वे केशनली में नीचे उतर जाते हैं। यही कारण है कि केशनली में जल ऊपर चढ़ जाता है, जबकि पारे का तल नीचे गिर जाता है। केशिकात्व का कारण द्रव का पृष्ठ-तनाव या संसंजक बल होता है।

(i) अशुद्धता के कारण, पृष्ठ-तनाव घट जायेगा; क्योंकि संसंजक बल घट जायेगा।

(ii) ताप के बढ़ने पर पृष्ठ-तनाव घट जाता है; क्योंकि संसंजक बल घट जाता है।

प्रश्न 4. धारा-रेखी प्रवाह (Stream-lined flow) से क्या तात्पर्य है?

What does meant by Stream-lined flow?

उत्तर "जब कोई द्रव इस प्रकार बहता है कि किसी एक ही बिन्दु से गुजरने वाले द्रव के सभी कण एक ही मार्ग पर चलते हैं, अर्थात् पीछे आने वाले कण आगे जाने वाले कणों का अनुसरण करते हैं, तो द्रव के ऐसे प्रवाह को **धारा-रेखी प्रवाह** (stream-lined flow) कहते हैं तथा उस मार्ग को धारा-रेखा (stream-line) कहते हैं। धारा-रेखा के किसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर द्रव के वेग की दिशा को व्यक्त करती है। दो धारा-रेखाएँ एक-दूसरे को काट नहीं सकतीं। यदि वे एक-दूसरे को काटेंगी, तब इसका अर्थ होगा कि कटान बिन्दु पर तरल के वेग की दो दिशाएँ हैं जो असम्भव है। धारा-रेखा, वक्र अथवा सरल रेखा कुछ भी हो सकती है।

5. आदर्श द्रवों के सांतत्य प्रवाह (continuity flow) का समीकरण स्थापित कीजिए।

Derive an equation of continuity flow in ideal liquids.

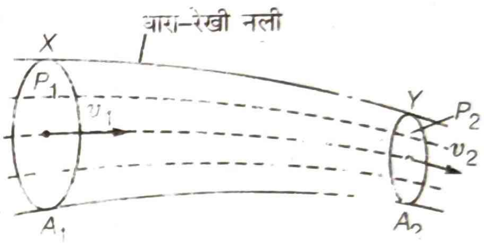
अथवा **किन संरक्षण नियमों पर 'अविरलता का समीकरण' और 'बरनोली प्रमेय का समीकरण' आधारित है?**

(UPBTE, Sem-I, 2016)

On which conservation laws 'equation of continuity' and 'equation of Bernoulli's theorem are based?

उत्तर **आदर्श द्रव** वह द्रव जिसमें (i) शून्य सम्पीड्यता तथा (ii) शून्य श्यानता होती है, आदर्श द्रव कहलाता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि एक असम्पीड्य तथा अश्यान द्रव एक असमान अनुप्रस्थ-काट की नली XY में होकर बह रहा है। माना कि नली के X व Y सिरों पर अनुप्रस्थ-काट के क्षेत्रफल क्रमश: A_1 व A_2 हैं तथा द्रव का वेग v_1 व v_2 है। माना कि द्रव का घनत्व ρ है। सिरे X से प्रवेश करने वाला द्रव एक सेकण्ड में v_1 दूरी तय करता है। अत: एक सेकण्ड में सिरे X पर क्षेत्रफल A_1 से गुजरने वाले द्रव का आयतन $= A_1 \times v_1$



चित्र 6.3

$\therefore$ 1 सेकण्ड में सिरे X से गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान $= \rho \times A_1 \times v_1$

इसी प्रकार, 1 सेकण्ड में सिरे Y से गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान $= \rho \times A_2 \times v_2$

अब, क्योंकि सिरे X में जो भी द्रव प्रवेश करता है वह दूसरे सिरे Y से बाहर निकल जाता है, उपर्युक्त दोनों द्रव्यमान बराबर हैं, अर्थात्

$$\rho \times A_1 \times v_1 = \rho \times A_2 \times v_2$$

अर्थात्

$$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2 \quad \text{या} \quad A \times v = \text{नियतांक}$$

स्पष्ट है कि नली में प्रत्येक स्थान पर नली की अनुप्रस्थ-काट के क्षेत्रफल तथा द्रव के वेग का गुणनफल एक नियतांक होता है। उपर्युक्त समीकरण को सांतत्य समीकरण (equation of continuity) भी कहते हैं। इस सिद्धान्त को द्रवों के बहने का 'अविरतता का सिद्धान्त' भी कहते हैं।

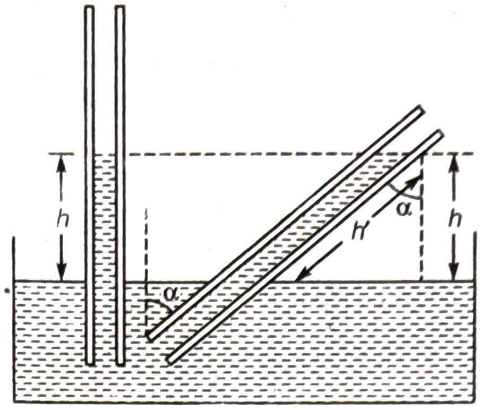
6. एक केशनलिका जिसकी त्रिज्या 0.4 मिमी है, जल में ऊर्ध्वाधर डुबाई जाती है। ज्ञात कीजिए कि केश नलिका में जल कितनी ऊँचाई तक चढ़ेगा? यदि इस केश नलिका को ऊर्ध्वाधर रेखा से 60° झुका दें तो नली की कितनी लम्बाई तक जल चढ़ेगा? जल का पृष्ठ-तनाव 7.0×10^{-2} न्यूटन/मी है।

A capillary tube of radius 0.4 mm immersed vertically in the water. Find the rise of water in the capillary tube. If capillary tube is inclined at 60° from the vertical line then water will rise upto what length? The surface tension of water is 7.0×10^{-2} N/m.

हल यहाँ, $r = 0.4$ मिमी $= 0.4 \times 10^{-3}$ मी, $T = 7.0 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मी, $\theta = 0°$ अर्थात् $\cos\theta = \cos 0° = 1$ एवं $g = 9.8$ मी/से^{2}, जल का घनत्व $\rho = 10^3$ किग्रा/मी^{3}

$$\therefore \quad h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} = \left[\frac{2 \times (7.0 \times 10^{-2}) \times 1}{(0.4 \times 10^{-3})(10^3) \times 9.8}\right] \text{मी}$$

$$= 3.57 \times 10^{-2} \text{ मी} = 3.57 \text{ सेमी}$$



चित्र 6.4

नली को ऊर्ध्वाधर से 60° झुकाने पर माना पानी नली में l' लम्बाई को घेरता है, परन्तु नली में पानी की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई h ही रहेगी। तब चित्र 6.4 से, $\cos 60° = h/l'h$

$$h' = \frac{h}{\cos 60°} = \frac{h}{1/2} = 2h$$

$$h' = 3.57 \times 2 \text{ सेमी} = \mathbf{7.14 \text{ सेमी}}$$

7. बरनौली की प्रमेय का उल्लेख कर उसको सिद्ध कीजिए।

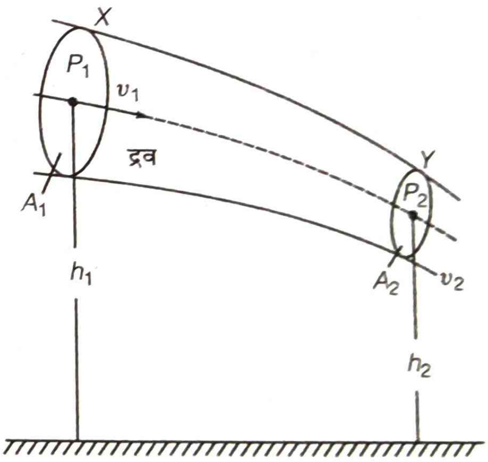
Explain Bernoulli's theorem and prove it.

उत्तर **बरनौली की प्रमेय** जब कोई **असम्पीड्य** तथा **अश्यान** द्रव (अथवा गैस) एक स्थान से दूसरे स्थान तक **धारा-रेखी प्रवाह** में बहता है तो इसके मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर इसके एकांक आयतन की कुल ऊर्जा अर्थात् दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग एक नियतांक होता है।

अर्थात् $$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{नियतांक}$$

इस प्रकार, बरनौली प्रमेय बहते हुए द्रव (अथवा गैस) के लिए **ऊर्जा-संरक्षण का सिद्धान्त** है।

उपपत्ति चित्र 6.5 में एक असमान अनुप्रस्थ-काट की नली में एक असम्पीड्य तथा अश्यान द्रव प्रवाहित हो रहा है। द्रव का प्रवाह धारा-रेखी है। माना पृथ्वी तल से h_1 ऊँचाई पर नली की अनुप्रस्थ-काट का क्षेत्रफल A_1, द्रव का वेग v_1 व दाब P_1 है तथा पृथ्वी तल से h_2 ऊँचाई पर नली की अनुप्रस्थ-काट का क्षेत्रफल A_2, द्रव का वेग v_2 व दाब P_2 है। यहाँ $A_2 < A_1$ है, इसलिए $v_1 < v_2$ होगा।



चित्र 6.5

अनुप्रस्थ-परिच्छेद A_1 पर प्रवेश करने वाले द्रव पर $P_1 \times A_1$ बल कार्य करता है। इस बल के अन्तर्गत द्रव 1 सेकण्ड में v_1 दूरी तय करता है; अतः 1 सेकण्ड में A_1 सिरे पर प्रवेश करने वाले द्रव पर

$$\text{किया गया कार्य} = \text{बल} \times \text{दूरी} = P_1 \times A_1 \times v_1$$

इसी प्रकार अनुप्रस्थ-परिच्छेद A_2 पर निकलने वाला द्रव बल $P_2 \times A_2$ के विरुद्ध कार्य करता है तथा 1 सेकण्ड में v_2 दूरी तय करता है।

अतः 1 सेकण्ड में A_2 सिरे से निकलने वाले द्रव द्वारा किया गया कार्य

$$= P_2 \times A_2 \times v_2$$

$\therefore$ द्रव पर किया गया नेट कार्य $= P_1 \times A_1 \times v_1 - P_2 \times A_2 \times v_2$ ...(i)

परन्तु, $A_1 \times v_1$ तथा $A_2 \times v_2$ क्रमशः एक सिरे से प्रवेश करने वाले व दूसरे सिरे से निकलने वाले द्रव के आयतन हैं जो आपस में बराबर होंगे।

अतः $$A_1 v_1 = A_2 v_2 = m/\rho$$

जहाँ, एक सेकण्ड में प्रवेश करने वाले द्रव का द्रव्यमान m तथा द्रव का घनत्व ρ है।

$\therefore$ द्रव पर किया गया नेट कार्य $= (P_1 - P_2)m/\rho$ ...(ii)

1 सेकण्ड में प्रवेश करने वाले तथा निकलने वाले द्रव की गतिज ऊर्जाएँ क्रमशः $\frac{1}{2}mv_1^2$ तथा $\frac{1}{2}mv_2^2$ हैं।

अत: 1 सेकण्ड में निकलने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$

A_1 तथा A_2 पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा क्रमशः mgh_1 व mgh_2 है।

$\therefore$ द्रव की स्थितिज ऊर्जा में कमी $= mg(h_1 - h_2)$ $[\because h_2 < h_1]$

द्रव की ऊर्जा में नेट वृद्धि $= \frac{1}{2}m(v_2^2 - {}_1^2) - mg(h_1 - h_2)$ ...(iii)

ऊर्जा में यह वृद्धि द्रव पर किये गये कार्य के बराबर होती है।

अत: किया गया कार्य = ऊर्जा में नेट वृद्धि

$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) - mg(h_1 - h_2) \quad \text{...(iv)}$$

अथवा
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(h_1 - h_2)$$

अथवा
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad \text{...(v)}$$

अथवा
$$\boldsymbol{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h =} \textbf{ नियतांक} \quad \text{...(vi)}$$

यह बरनौली की प्रमेय का समीकरण है।

8. रेनॉल्ड संख्या क्या है? इस संख्या से आप द्रव-प्रवाह का प्रकार किस प्रकार ज्ञात करेंगे? (UPBTE 2007)
What is reynold number? How would you find the type of liquid flow with the help of reynold's number?

उत्तर **रेनॉल्ड संख्या** सन् 1883 ई० में प्रो० ऑसबार्न रेनॉल्ड (Osborne Reynold) ने केशिका नली में द्रवों के प्रवाह के सम्बन्ध में अनेक प्रयोग किए और यह निष्कर्ष निकाला कि द्रवों के प्रवाह का क्रान्तिक वेग v_c

(i) द्रव के घनत्व (ρ) के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् $v_c \propto 1/\rho$

(ii) केशिका नली के व्यास d के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् $v_c \propto \frac{1}{d}$

(iii) द्रव के श्यानता गुणांक (η) के अनुक्रमानुपाती होता है, अर्थात् $v_c \propto \eta$

अत: तीनों सम्बन्धों को एकसाथ लिखने पर,

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho d} \quad \text{अथवा} \quad v_c = \frac{R_e \eta}{\rho d} \quad \text{...(i)}$$

जहाँ, R_e रेनॉल्ड संख्या कहलाती है।

अत: रेनॉल्ड संख्या
$$R_e = \frac{v_c \rho d}{\eta} \quad \text{...(ii)}$$

उपरोक्त सूत्र (ii) को पुनर्व्यवस्थित करके निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$$R_e = \frac{\rho \cdot A v_c^2}{\left(\frac{\eta A v_c}{d}\right)} \quad \text{...(iii)}$$

यहाँ, A = नली का अनुप्रस्थ-परिच्छेद

यहाँ, $\rho A v_c^2$ को जड़त्वीय बल तथा $\frac{\eta A v_c}{d}$ को श्यान बल कहते हैं।

अत: $\quad$ रेनॉल्ड संख्या $R_e = \dfrac{\text{जड़त्वीय बल}}{\text{श्यान बल}}$

अर्थात् जड़त्वीय बल (अर्थात् तरल के प्रवाह-मार्ग के अवरोध का जड़त्व) तथा श्यान बल का अनुपात रेनॉल्ड संख्या कहलाती है।

नोट रेनॉल्ड संख्या विमाहीन होती है।

$$R_e = v_c \rho d/\eta$$

अत:
$$R_e \text{ की विमाएँ} = [LT^{-1}] \times [ML^{-3}] \times [L] / [ML^{-1}T^{-1}]$$
$$= [M^0L^0T^0] = \text{विमाहीन राशि}$$

रेनॉल्ड संख्या से द्रव-प्रवाह का प्रकार ज्ञात करना

रेनॉल्ड संख्या से द्रव प्रवाह का प्रकार निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं—

(i) किसी द्रव के लिए यदि रेनॉल्ड संख्या का मान 2000 से कम है तो उसका प्रवाह स्तरीय (laminar) या धारा-रेखी (stream-lined) होता है।

(ii) यदि रेनॉल्ड संख्या का मान 3000 से अधिक है तो द्रव-प्रवाह विक्षुब्ध (turbulent) होता है।

(iii) यदि रेनॉल्ड संख्या का मान 2000 और 3000 के बीच होता है तो द्रव का प्रवाह अस्थिर (unstable) होता है तथा कभी धारा-रेखी और कभी विक्षुब्ध हो सकता है।

9. केशिकात्व से आप क्या समझते हैं? काँच की केशनली में चढ़े जल-स्तम्भ की ऊँचाई h, नली की आन्तरिक त्रिज्या r तथा जल के पृष्ठ-तनाव T में सम्बन्ध स्थापित कीजिए। (UPBTE 2011)

What do you mean by capillarity? Establish a relation among the height h of rise in water column in a glass capillary tube, its internal radius 'r' and surface tension T of water.

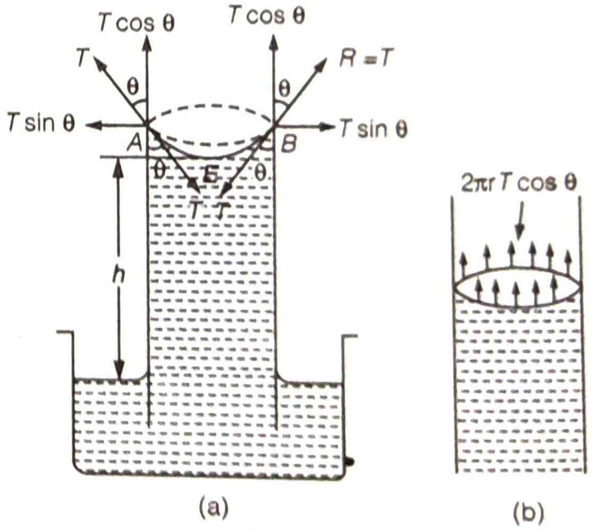
अथवा **केशिकात्व प्रक्रिया की व्याख्या कीजिए।**

Explain the "capillary action". (UPBTE, Sem-I, 2016)

उत्तर **केशिकात्व** द्रव का वह गुण-धर्म जिसके कारण किसी केशनली को इसमें खड़ा करने पर यह नली के बाहर द्रव के तल की तुलना में नली में ऊपर चढ़ता है या नीचे उतरता है, **केशिकात्व** कहलाता है।

काँच की केशनली में चढ़े द्रव-स्तम्भ की ऊँचाई, त्रिज्या तथा द्रव के पृष्ठ-तनाव में सम्बन्ध

संलग्न चित्र 6.6 (a) में जल के एक बीकर में काँच की केशनली खड़ी की गई है जिसमें जल के तल से h ऊँचाई तक जल चढ़ता है। माना कि जल का पृष्ठ-तनाव T है। नली में जल का अवतल-पृष्ठ AEB है। इसकी परिधि $2\pi r$ नली की दीवारों के सम्पर्क में है, जहाँ r केशनली की त्रिज्या है। इसकी एकांक लम्बाई पर जल के पृष्ठ-तनाव के कारण बल T नली की दीवार से θ कोण पर जल के अन्दर की ओर लगता है, θ जल-काँच के लिए स्पर्श कोण है।



चित्र 6.6

नली की दीवार भी प्रतिक्रिया के कारण उतना ही बल T जल के वक्रपृष्ठ की परिधि पर बाहर की ओर लगाती है। इस बल को ऊर्ध्व और क्षैतिज दो घटकों, $T\cos\theta$ और $T\sin\theta$ में वियोजित करते हैं। $T\cos\theta$ ऊर्ध्व दिशा में परिधि $2\pi r$ की प्रत्येक एकांक लम्बाई पर ऊपर की ओर कार्य करता है; अत: प्रतिक्रिया बल का मान $2\pi r \times T\cos\theta$ के बराबर होता है जो नली में चढ़े जल के स्तम्भ के भार को साधता है। चूँकि $T\sin\theta$ परिधि पर बाहर की ओर लगता है, अत: पूरी परिधि के लिए उसका परिणामी बल शून्य होगा। यदि जल का घनत्व ρ हो, तो जल के स्तम्भ का भार $= \pi r^2 h \times \rho \times g$

सन्तुलन की अवस्था में,

$$2\pi r \times T \cos\theta = \pi r^2 h \times \rho \times g$$

$\therefore$
$$T = \frac{rhg\rho}{2\cos\theta}$$

उपर्युक्त सूत्र से स्पष्ट है कि यदि जल काँच का स्पर्श-कोण θ ज्ञात हो तो h तथा r के मान ज्ञात करके जल के पृष्ठ-तनाव T की गणना की जा सकती है।
शुद्ध जल एवं साफ काँच के लिए स्पर्श कोण θ लगभग शून्य है; अतः $\cos\theta = 1$, इस प्रकार

$$T = \frac{rhg\rho}{2}$$

10. एक केशनली में पानी 2 सेमी ऊँचा चढ़ता है। एक अन्य केशनली जिसकी त्रिज्या पहली की एक तिहाई है, उसमें पानी किस ऊँचाई तक चढ़ेगा? यदि प्रथम केशनली को ऊर्ध्वाधर रेखा से 60° कर दें तो नली में पानी की स्थिति क्या होगी? (UPBTE 2000)

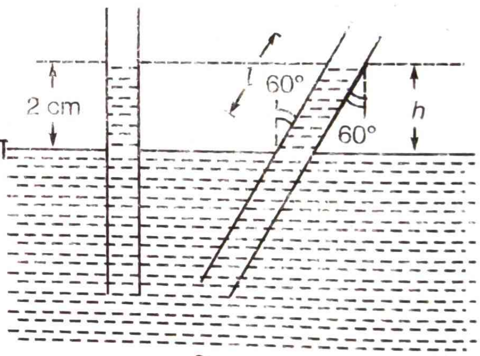
The water rise in a capillary tube is 2 cm. What will be the height of rise in water in another capillary tube whose radius is $\frac{1}{3}$ of the first tube? If we inclined first capillary tube at an angle 60°, then what will be the position of water in the tube?

हल जूरिन के नियम से,

$$h_1 r_1 = h_2 r_2$$

या
$$h_2 = \frac{h_1 r_1}{r_2} \quad \left[\text{यहाँ, } r_1 = r \text{ (माना) तो } r_2 = \frac{r}{3}, h_1 = 2 \text{ सेमी}\right]$$

$$= \frac{2 \times r}{\frac{r}{3}} = 6 \text{ सेमी}$$



चित्र 6.7

प्रथम केशनली की 60° पर झुकी हुई स्थिति चित्र 6.7 में दर्शायी गयी है। माना इस स्थिति में पानी, नली में l सेमी लम्बाई तक है, तो चित्र 6.7 से

$$\frac{h}{l} = \cos 60°$$

या
$$l = \frac{h}{\cos 60°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \mathbf{4} \textbf{ सेमी} \quad [\because h = 2 \text{ सेमी}]$$

11. 1.0 सेमी त्रिज्या की जल की एक बूँद को 10^6 बूँदों में तोड़ दिया जाता है। इस कार्य में व्यय ऊर्जा की गणना कीजिए। पानी का पृष्ठ-तनाव 7.2×10^{-2} न्यूटन/मी है।

One water drop of radius of 1 cm has broken into 10^6 drops. Calculate the amount of energy spent in this work. Surface tension of water is 7.2×10^{-2} Newton/m.

हल माना बड़ी बूँद की त्रिज्या = R तथा छोटी बूँद की त्रिज्या = r, यहाँ $R = 1$ सेमी $= 10^{-2}$ मी
$\because$ 10^6 छोटी बूँदों का आयतन = 1 बड़ी बूँद का आयतन

$\therefore$
$$10^6 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 1 \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r^3 = \frac{R^3}{10^6}$$

या
$$r = \frac{R}{10^2}$$

$\therefore$ पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि $\Delta A = 10^6$ छोटी बूँदों का पृष्ठीय क्षेत्रफल -1 बड़ी बूँद का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 10^6 \times 4\pi r^2 - 1 \times 4\pi R^2 = 4\pi\left[10^6 \times \left(\frac{R}{10^2}\right)^2 - R^2\right]$$

$$= 4\pi \times 99R^2$$

$$= 4 \times 3.14 \times 99 \times (10^{-2} \text{ मी})^2 = 0.124 \text{ मी}^2$$

$\therefore$ व्यय ऊर्जा $W = T \times \Delta A = (7.2 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मी$) \times 0.124$ मी$^2 = \mathbf{8.928 \times 10^{-3}}$ **जूल**

12. एक असमान परिच्छेद वाली क्षैतिज नली से 0.8 ग्राम/सेमी धनत्व वाला कोई द्रव बह रहा है। बिन्दु X की त्रिज्या 2 सेमी तथा बिन्दु S की त्रिज्या 1 सेमी है। बिन्दु X तथा S के मध्य दाबान्तर 8 सेमी (पारे का स्तम्भ) है। नली में बहने वाले द्रव के प्रवाह की गणना कीजिए। ($g = 980$ सेमी/से^{2})

A liquid having density 0.8 gm/cm passing from a horizontal pipe whose cross-sectional area is non-uniform. The radius of the point X is 2 cm and radius of point S is 1 cm. The pressure gap between point X and S is 8 cm (column of mercury). Calculate the flow of fluid flowing in the river. (cm/sec^2)

हल असमान परिच्छेद वाली नली में द्रव-प्रवाह की दर,

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{\left(\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}\right)} \quad \text{(वेन्च्यूरीमीटर)}$$

यहाँ,

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi (2)^2 = 4\pi \text{ सेमी}^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi (1)^2 = \pi \text{ सेमी}^2$$

$$g = 980 \text{ सेमी/से}^2$$

$$h = 8 \text{ सेमी (पारे का स्तम्भ)}$$

$$\therefore \quad Q = 4\pi \times \pi \sqrt{\left(\frac{2 \times 980 \times 8}{16\pi^2 - \pi^2}\right)} \quad (A_1, A_2, g \text{ व } h \text{ के मान रखने पर})$$

$$Q = \frac{4\pi^2}{\pi} \sqrt{\left(\frac{2 \times 980 \times 8}{15}\right)} = 4\pi \sqrt{\left(\frac{15680}{15}\right)}$$

$$= 4 \times 3.14 \times 32.2 = \mathbf{406} \textbf{ सेमी}^2\text{/से}$$

13. जल की एक बूँद जिसकी त्रिज्या 0.0015 मिमी है, वायु में गिर रही है। यदि वायु का श्यानता गुणांक 1.8×10^{-5} किग्रा/मी-से हो, तो बूँद का सीमान्त वेग क्या होगा? (जल का घनत्व $= 1.0 \times 10^3$ किग्रा/मी^{3}, वायु का घनत्व $= 0$, $g = 9.8$ न्यूटन/किग्रा)

A drop of water is dropped in the air whose radius is 0.0015 mm. If the viscosity coefficient of air is 1.8×10^{-5} kg/ms, then what will be the marginal speed of drop? (Density of water $= 1.0 \times 10^3$ kg/m^3, density of air $= 0$, $g = 9.8$ Newton/kg)

हल जब जल की एक छोटी बूँद जिसकी त्रिज्या r तथा घनत्व ρ_w है, घनत्व की श्यान वायु में स्वतन्त्रतापूर्वक गिर रही है, तो उस पर तीन बल कार्य करते हैं

(i) जल की बूँद पर गुरुत्वीय बल, $F_g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_w \cdot g \downarrow$ (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)

(ii) वायु का उत्प्लावन बल (upthrust),

$$F_u = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_a \cdot g \uparrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

(iii) स्टोक के नियमानुसार प्रतिरोधक श्यानबल

$$F_r = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \uparrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

अन्तिम वेग प्राप्त कर लेने पर चूँकि त्वरण शून्य है, अत: परिणामी बल

$$F = 0$$

$$F_g - F_u - F_r = 0 \quad \text{या} \quad F_r = F_g - F_u$$

या

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_w \cdot g - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_a \cdot g$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 (\rho_w - \rho_a) g$$

∴ सीमान्त वेग,

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_w - \rho_a) g / 6\pi\eta r$$

$$= \frac{2}{9} r^2 (\rho_w - \rho_a) g / \eta \qquad \text{...(i)}$$

दिया है,

$$r = 0.0015 \text{ मिमी} = 15 \times 10^{-7} \text{ मी}$$

$$\rho_w = 1 \times 10^3 \text{ किग्रा-मी}^{-3}; \quad \rho_a = 0 \text{ (शून्य)}$$

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ किग्रा-मी}^{-1}\text{-से}^{-1}; \; g = 9.8 \text{ मी/से}^{-2}$$

समी (i) में ये मान प्रतिस्थापित करने पर,

सीमान्त वेग

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{(15 \times 10^{-7})^2 (10^3 - 0) 9.8}{1.8 \times 10^{-5}}$$

$$= \frac{2 \times 225 \times 9.8 \times 10^{-6}}{9 \times 1.8} = \frac{4410}{16.2} \times 10^{-6} = \mathbf{2.72 \times 10^{-4}} \textbf{ मी/से}^{-1}$$

14. स्टोक के नियम द्वारा अधिक श्यान द्रवों की श्यानता (viscosity) किस प्रकार ज्ञात की जाती है? प्रयुक्त सूत्र का निगमन कीजिए। (UPBTE 2006)

How to identify the viscosity of more viscous fluids by the Stock rule? Derive the applied formula.

उत्तर **स्टोक का नियम** सर जॉर्ज स्टोक ने सिद्ध किया कि यदि r त्रिज्या वाला एक छोटा गोला किसी अनन्त विस्तार वाले पूर्णत: समांग माध्यम में सीमान्त चाल v से गति करता है तो उस पर कार्य करने वाला बल (श्यान बल), $F = 6\pi\eta r v$ होगा। जहाँ पर, η = माध्यम का श्यानता गुणांक (coefficient of viscosity) अर्थात् श्यान बल निम्नलिखित पर निर्भर करता है

(i) द्रव के श्यानता गुणांक पर, (ii) गोले के व्यास पर, (iii) द्रव से सम्बन्धित इसके वेग v पर।

माना r त्रिज्या तथा P_S घनत्व का एक छोटा वृत्त, P_L घनत्व के श्यान द्रव में गुरुत्व के अन्तर्गत गिराया जाता है। तब इस पर तीन बल कार्य करते हैं

1. वृत्त पर गुरुत्वाकर्षण बल (नीचे की ओर)।
2. द्रव का उत्प्लावन बल, F_u
3. स्टोक नियम के अनुसार, प्रतिरोधक श्यान बल, F_r (नीचे की ओर)।

अत: (i) $F_g = \frac{4}{3} \pi r^3 P_S g \downarrow$

(ii) $F_u = \frac{4}{3} \pi r^3 P_L g \uparrow$

(iii) $F_r = 6\pi\eta r v \downarrow$

अब, वृत्त एकसमान वेग से गति कर रहा है, क्योंकि त्वरण शून्य होता है, अत: परिणामी बल शून्य होगा।

तब
$$F = 0$$

अब
$$F_g - F_u - F_r = 0 \text{ या } F_g = F_u + F_r$$

या
$$\frac{4}{3}\pi r^3 P_S g = \frac{4}{3}\pi r^3 P_L g + 6\pi\eta r v$$

या
$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 P_S g - \frac{4}{3}\pi r^3 P_L g$$

या
$$\eta = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 (P_S - P_L) g}{6\pi r v} = \frac{2}{9} \times \frac{r^2 (P_S - P_L) g}{v}$$

15. श्यानता गुणांक की परिभाषा दीजिए। स्टोक के नियम की सहायता से इसे किस प्रकार प्रयोग द्वारा ज्ञात किया जाता है? वर्णन कीजिए।

Define coefficient of viscosity. With the help of Stoke's law, how it is determined from what type of experiment? Explain it.

उत्तर **श्यानता गुणांक** माना ST एक स्थिर सतह है तथा जिससे x दूरी पर वेग v तथा $x + dx$ दूरी पर वेग $v + dv$ बढ़ जाता है; क्योंकि बहते द्रव की विभिन्न परतों के बीच आपेक्षिक गति होती है जिसके कारण पर्तों के बीच श्यान बल कार्य करता है। न्यूटन के श्यान बल के नियमानुसार,

(i) $F \propto A$ (पर्त के क्षेत्रफल), (ii) $F \propto \frac{dv}{dx}$ (वेग प्रवणता)

$$F \propto A\frac{dv}{dx}; \qquad F = -\eta A \cdot \frac{dv}{dx}$$

जहाँ, η एक नियतांक है जिसका मान बहने वाले द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है तथा जिसे द्रव का श्यानता गुणांक कहते हैं। ऋण चिह्न से तात्पर्य—श्यान बल की दिशा, द्रव-प्रवाह की दिशा के विपरीत होती है।

यदि
$$A = 1 \quad \text{तथा} \quad \frac{dv}{dx} = 1 \quad \text{तब} \quad F = \eta$$

अत: किसी द्रव का श्यानता गुणांक द्रव के भीतर एकांक क्षेत्रफल वाली उन दो परतों के बीच स्पर्शरेखीय बल है जिन परतों के बीच एकांक वेग प्रवणता पायी जाती है।

स्टोक के नियम द्वारा द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात करना सर **जॉर्ज स्टोक** ने ज्ञात किया कि जब सूक्ष्म आकार की एक वस्तु एक ऐसे माध्यम में गिराई जाती है जिसमें श्यानता का गुण हो तो प्रारम्भ में वस्तु की गति में त्वरण होता है, परन्तु कुछ दूरी चलने के बाद वस्तु का वेग नियत हो जाता है। श्यान माध्यम में स्टोक ने ज्ञात किया कि r त्रिज्या की गोल वस्तु के η श्यानता गुणांक वाले माध्यम में गिरने पर उसके द्वारा सीमान्त वेग यदि V है, तो वस्तु पर लगने वाला बल

$$F = 6\pi\eta r V$$

माना एक दृढ़ व चिकनी गोलाकार वस्तु, जिसका भार W, त्रिज्या r व घनत्व ρ है, σ घनत्व व η श्यानता गुणांक वाले द्रव में मुक्त रूप से छोड़ी गयी, तब

गोलाकार वस्तु का भार, W = आयतन $\times$ घनत्व $\times$ गुरुत्वीय त्वरण (नीचे की ओर) $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho \times g$

द्रव का उत्क्षेप बल, P = गोले द्वारा हटाये गए द्रव का आयतन $\times$ द्रव का घनत्व $\times$ गुरुत्वीय त्वरण

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$$

गोले पर श्यान बल, $F = 6\pi\eta rV$

साम्यावस्था की शर्त से,
$$6\pi\eta rV + \frac{4}{3}\pi r^3\sigma g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$$
$$6\pi\eta rV = \frac{4}{3}\pi r^3 g\cdot(\rho-\sigma)$$
$$V = \frac{2r^2(\rho-\sigma)\,g}{9\eta}$$

श्यानता गुणांक,
$$\eta = \frac{2r^2\,(\rho-\sigma)\,g}{9V}$$

श्यानता गुणांक का SI मात्रक 'किग्रा/(मी-सेकण्ड)' है तथा इसकी विमा $(ML^{-1}T^{-1})$ है'

श्यानता गुणांक का मात्रक प्वॉयज भी है, जहाँ

1 किग्रा/(मी-सेकण्ड) = 10 प्वॉयज

16. केशिका उन्नयन सिद्धान्त से जल का पृष्ठ-तनाव ज्ञात करने की प्रयोग विधि समझाइए।

Explain the experimental method of finding surface tension of water with the help of capillary ascent principle.

उत्तर

केशिका उन्नयन सिद्धान्त से जल का पृष्ठ-तनाव ज्ञात करना

r त्रिज्या की काँच से बनी केशनली में चढ़े द्रव (जल) स्तम्भ की ऊँचाई के सूत्र, $h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$ (जहाँ, ρ = जल का घनत्व, g = गुरुत्व त्वरण तथा θ = काँच-जल का स्पर्श कोण) से जल का पृष्ठ तनाव

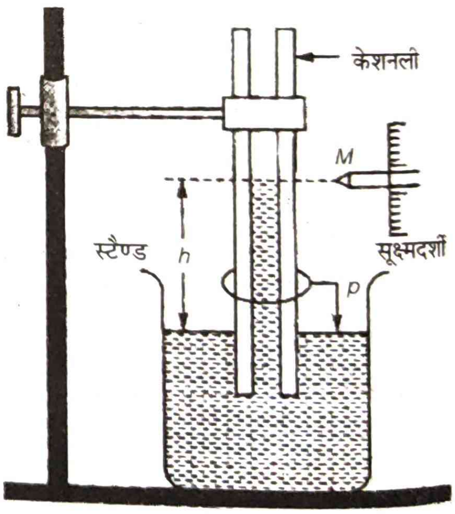
$$T = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta} \quad \text{...(i)}$$

यदि शुद्ध जल तथा स्वच्छ काँच के लिए θ का मान बहुत कम (लगभग शून्य) मान लिया जाए, तो $\cos\theta = \cos 0° = 1$

अतः,
$$T = \frac{rh\rho g}{2} \quad \text{...(ii)}$$

निम्न प्रयोग द्वारा h तथा r के मान ज्ञात करके इस सूत्र की सहायता से जल के पृष्ठ-तनाव T की गणना की जा सकती है

प्रयोग विधि प्रयोग करने के लिए काँच की लम्बाई में सर्वत्र एकसमान व्यास वाली एक केशनली लेकर उसको पहले कास्टिक सोडे द्वारा तथा तत्पश्चात् नाइट्रिक अम्ल द्वारा साफ करके अन्त में जल से धोकर उसको सुखा लेते हैं। अब इस केशनली को चित्र 6.8 की भाँति एक ऊर्ध्वाधर स्टैण्ड में इस प्रकार कस देते हैं कि इसका निचला सिरा एक बीकर में रखे प्रायोगिक द्रव (जल में) डुबा रहे। एक पिन P जो दो बार समकोण पर मुड़ी रहती है केशनली की लम्बाई के सहारे रबड़ बैण्ड द्वारा सम्बन्धित रहती है। अब पिन P को इस प्रकार समायोजित करते हैं कि इसका सिरा बीकर में जल के क्षैतिज तल को छुए। जब जल नली में चढ़कर स्थिर हो जाता है, तो एक चल-सूक्ष्मदर्शी को नली में तल के वक्र पृष्ठ के निम्नतम बिन्दु पर फोकस करके इसका पाठ्यांक ले लेते हैं। इसके पश्चात् बीकर हटा लेते हैं तथा चल-सूक्ष्मदर्शी को पिन P के निचले सिरे पर फोकस करके इसका पाठ्यांक ले लेते हैं। इन दोनों पाठ्यांकों का अन्तर ही केशनली में चढ़े जल-स्तम्भ की ऊँचाई h के बराबर होगा।



चित्र 6.8

अब केशनली को क्षैतिज स्टैण्ड पर रखकर चल-सूक्ष्मदर्शी की सहायता से केशनली का आन्तरिक व्यास नापकर केशनली की त्रिज्या r का मान प्राप्त कर लेते हैं। जल का ताप नापकर उस ताप पर जल का घनत्व ρ, घनत्व सारणी से ज्ञात कर लेते हैं।

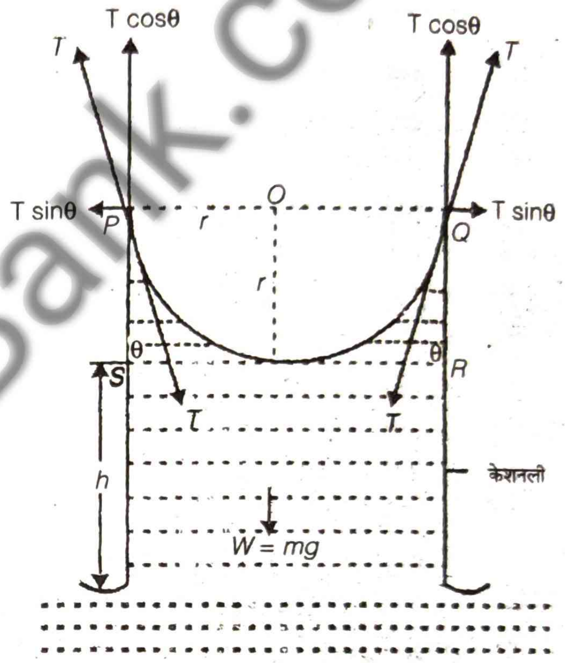
अब उपरोक्त सूत्र में, r, h, ρ तथा g के मान रखकर जल के पृष्ठ-तनाव T की गणना कर लेते हैं। T का यह मान कमरे के ताप पर प्राप्त होता है।

17. केशनली में द्रव के उन्नयन का सूत्र स्थापित कीजिए। **(UPBTE, Sem-I 2016)**

Derive the formula for rise of liquid in capillary tube.

उत्तर केशनली में द्रव के उन्नयन के सूत्र की व्युत्पत्ति Derivation of Ascent Formula of Liquid in a Capillary Tube

माना एक केशनली को किसी द्रव में डालने पर द्रव ऊपर चढ़ जाता है। यदि द्रव का पृष्ठ तनाव T हो तो स्पर्श कोण θ पर पृष्ठ तनाव नीचे की ओर कार्य करता है। पृष्ठ तनाव के बराबर परन्तु विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया बल (T) ऊपर की ओर लगने लगता है इसलिये द्रव ऊपर की ओर चढ़ जाता है। केशनली में द्रव तब तक ऊपर चढ़ता है जब तक कि ऊर्ध्व प्रतिक्रिया बल का मान चढ़े हुये द्रव के भार के बराबर न हो जाये।



चित्र 6.9 द्रव का चढ़ना

ऊर्ध्व प्रतिक्रिया बल को वियोजित करने पर

$T\sin\theta$: इसकी दिशा नली पर लम्बवत् रहती है, की इसलिये द्रव के चढ़ने के लिये उत्तरदायी नहीं होता है।

$T\cos\theta$: चूँकि पृष्ठ तनाव इकाई लम्बाई पर लगने वाला बल होता है। इसलिये $T\cos\theta$ नली की इकाई परिधि पर ऊर्ध्व दिशा में लगने वाला बल है।

अत: नली की सम्पूर्ण परिधि पर ऊर्ध्व दिशा में लगने वाला बल

$$= 2\pi \times T\cos\theta \quad \ldots(i)$$

जहाँ r केशनली की त्रिज्या है।

अब नली में चढ़े हुये द्रव का आयतन

$V = \pi r^2 h + [PQRS$ का आयतन $-$ अर्ध गोले का आयतन$]$

$$= \pi r^2 h + \left[(\pi r^2)r - \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}\right] = \pi r^2 h + \frac{\pi r^3}{3} = \pi r^2\left(h + \frac{r}{3}\right)$$

अत: नली में चढ़े द्रव का भार $W = mg = V\rho g$, जहाँ ρ द्रव का घनत्व है।

इसलिये
$$W = \pi r^2\left(h + \frac{r}{3}\right)\rho g \quad \ldots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को बराबर करने पर,

$$\pi r^2\left(h + \frac{r}{3}\right)\rho g = 2\pi r \times T\cos\theta$$

इसलिये द्रव की ऊँचाई
$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} - \frac{r}{3}$$

चूँकि केशनली की त्रिज्या बहुत कम होती है इसलिये $\frac{r}{3}$ को नगण्य मानने पर

$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$