

आवर्त गति

Harmonic Motion

1. आयाम को परिभाषित कीजिए।

उत्तर सरल आवर्त गति करते हुये किसी कण का साम्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन आयाम कहलाता है। सरल आवर्त गति की समीकरण $y = a \sin \omega t$ में y का मान अधिकतम होने के लिये $\sin \omega t = \pm 1$ होना चाहिए। अतः अधिकतम विस्थापन या आयाम का मान $+a$ या $-a$ होता है।

2. सेकण्ड लोलक किसे कहते हैं?

(UPBTE 2000)

उत्तर एक ऐसा सरल लोलक जिसका आवर्तकाल 2 सेकण्ड होता है, उसे सेकण्ड लोलक कहते हैं।

सूत्र

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ से,}$$

$$\text{सेकण्ड लोलक की लम्बाई, } l = \frac{g T^2}{4\pi^2} = \frac{9.8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7}{4 \times 22 \times 22} = 0.9921 \text{ मी}$$

$$\left[\because g = 9.8 \text{ मी/से}^2 \right]$$

$$T = 2 \text{ सेकण्ड}$$

3. एक 'सरल लोलक' a त्वरण से ऊपर जाती हुई लिफ्ट के भीतर दोलित कराया जाता है। इसके आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

उत्तर सरल लोलक का आवर्तकाल, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

जब सरल लोलक ' a ' त्वरण से ऊपर जाती हुई लिफ्ट के भीतर दोलित कराया जाता है, तो लोलक पर नेट बल,

$$T - mg = ma \quad (\text{जहाँ, } T = \text{धारे का तनाव})$$

इस प्रकार, ' g ' का प्रभावी मान $(g + a)$ होगा, अतः दोलनकाल, $T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{l}{g+a}\right)}$ अर्थात् दोलनकाल घट जायेगा।

4. सरल आवर्त गति करते हुए पिण्ड का आवर्तकाल 0.05 सेकण्ड है। यदि आयाम 4 सेमी हो, तो पिण्ड का अधिकतम वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए।

छल प्रश्नानुसार, $T = 0.05$

$$\therefore n = \frac{1}{0.05} = 20 \text{ तथा } a = 4.0 \text{ सेमी}$$

अतः अधिकतम वेग,

$$v_{\max} = a\omega = a(2\pi n) = 4.0(2 \times \pi \times 20) = 160\pi \text{ मी/से}$$

तथा अधिकतम त्वरण,

$$\bar{a}_{\max} = a\omega^2 = a(2\pi n)^2 \quad (\because \text{अधिकतम त्वरण, } \bar{a} = a\omega^2)$$

$$= 4.0(2 \times \pi \times 20)^2 = 6400\pi^2 \text{ मी/से}^2$$

5. सरल आवर्त गति करते हुए एक कण का साम्य स्थिति से 3 सेमी दूरी पर त्वरण 12 सेमी/से² है। इसका आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

छल यदि S.H.M. कर रहे किसी कण का, किसी क्षण साम्य स्थिति से विस्थापन y हो, तो कण का त्वरण,

$$a = \omega^2 y$$

यहाँ

$$a = 12 \text{ सेमी/से}^2 \text{ तथा } y = 3 \text{ सेमी}$$

∴

$$12 \text{ सेमी/से}^2 = \omega^2 \cdot 3 \text{ सेमी} \text{ या } \omega^2 = 12/3 = 4 \text{ से}^2 = \omega^2 = 2 \text{ से}^2$$

अतः

$$\text{आवर्तकाल, } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{2} = 3.14 \text{ सेकण्ड}$$

- प्र० 6. एक स्प्रिंग का बल स्थिरांक 50 न्यूटन/मीटर है। इससे 20 ग्राम का भार लटकाकर छोड़ देने से भार की आवृत्ति क्या होगी? (UPBTE 2000)

हल

$$\text{भारयुक्त स्प्रिंग का दोलनकाल, } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

यहाँ,

$$m = 20 \text{ ग्राम} = 20/1000 \text{ किग्रा} \quad \text{तथा } K = 50 \text{ न्यूटन/मीटर}$$

∴

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{20/1000}{50}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{20}{50000}} = \frac{2 \times 3.14}{50}$$

∴ भार की दोलन आवृत्ति,

$$n = \frac{1}{T} = \frac{50}{2 \times 3.14} = 8 \text{ कम्पन/सेकण्ड (हर्ट्ज)}$$

- प्र० 7. अनुनाद की स्थिति में Q-फैक्टर का क्या महत्व है?

(UPBTE 2014)

उत्तर किसी अवमन्दित दोलन का Q-गुणांक दोलन के दौरान एकत्रित ऊर्जा तथा उसके एक कम्पन में क्षय ऊर्जा के अनुपात का 2π गुना होता है।

$$Q = 2\pi \left[\frac{\text{एकत्रित औसत ऊर्जा}}{\text{एक कम्पन में क्षय ऊर्जा}} \right]$$

मुक्त दोलन में ऊर्जा क्षय का मान शून्य होता है, अतः मुक्त दोलनों के लिए Q का मान अनंत होता है। प्रणोदित दोलनों में अवमन्दन बलों के कारण होने वाली ऊर्जा हानि की पूर्ति बाह्य बलों के द्वारा की जाती है। Q-गुणांक किसी अवमन्दित दोलन प्रणाली की दक्षता की माप है।

- प्रश्न 8. सरल आवर्त गति करते पिण्ड से कौन-सी भौतिक राशि संरक्षित रहती है?

उत्तर सरल आवर्त गति करते पिण्ड में आन्तरिक ऊर्जा (E) संरक्षित रहती है।

- प्रश्न 9. प्रत्यानयन बल किसे कहते हैं? एक उदाहरण भी दीजिए।

उत्तर प्रत्यानयन बल, वह बल है जो कम्पन करते किसी कण को विस्थापित अवस्था से साम्य स्थिति में लाने का प्रयत्न करता है। उदाहरण— सरल लोलक जब गति करता है तब बल $mg \sin \theta$ प्रत्यानयन बल का कार्य करता है।

- प्र० 10. यदि सरल लोलक के पिण्ड का आकार बड़ा कर दें तो इसके आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर ∵ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, अतः हम कह सकते हैं कि आवर्तकाल (T) पिण्ड के आकार या द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता

है। इसलिए लोलक के पिण्ड का आकार बड़ा कर देने पर पिण्ड का आवर्तकाल अपरिवर्तित रहता है।

11. अनुनाद के कोई दो उदाहरण दीजिए।

उत्तर (i) विद्युत चुम्बकीय अनुनाद इसके कारण ही रेडियो पर विभिन्न प्रोग्राम सुनना सम्भव होता है।

(ii) ध्वनि अनुनाद इस अनुनाद का प्रयोग करके प्रयोगशाला में स्वरित्री की आवृत्ति ज्ञात कर सकते हैं।

12. यदि सरल लोलक को पहाड़ों पर या धरती के अन्दर ले जाएँ तो इसके आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

उत्तर पहाड़ों पर या धरती के अन्दर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान कम हो जाता है अर्थात् $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$

∴ आवर्तकाल बढ़ जाएगा व लोलक घड़ी धीमी हो जाएगी।

13. सरल आवर्त गति करते पिण्ड का आयाम 0.02 मी व आवृत्ति 50 हर्ट्ज है। अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल अधिकतम त्वरण, $\alpha = \omega^2 \times \text{आयाम}$

$$= (2\pi n)^2 \times a = 4\pi^2 \times 50 \times 50 \times 0.02 \\ = 200\pi^2 \text{ मी/से}^2 = 1971.9 \text{ मी/से}^2$$

अतः अधिकतम त्वरण = 1971.9 मी/से²

14. सरल आवर्त गति के आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।

उत्तर (i) कण की गति निश्चित बिन्दु के इधर-उधर हो।

(ii) कण पर कार्यगत् प्रत्यानयन बल सदैव उस निश्चित बिन्दु (साम्य स्थिति) से कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती हो।

(iii) बल (या त्वरण) सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट हो।

15. सरल आवर्त गति करते पिण्ड की कुल ऊर्जा पर टिप्पणी लिखिए।

उत्तर ∵ सरल आवर्त गति करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा

$$(K) = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - y^2)$$

तथा सरल आवर्त गति करते पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा

$$(U) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

∴ कुल ऊर्जा (E) = U + K = $\frac{1}{2} m\omega^2 a^2$

13. सरल आवर्त गति करते पिण्ड का आयाम 0.02 मी व आवृत्ति 50 हर्ट्ज है। अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर अधिकतम त्वरण, $\alpha = \omega^2 \times \text{आयाम}$

$$= (2\pi n)^2 \times a = 4\pi^2 \times 50 \times 50 \times 0.02 \\ = 200\pi^2 \text{ मी/से}^2 = 1971.9 \text{ मी/से}^2$$

अतः अधिकतम त्वरण = 1971.9 मी/से²

14. सरल आवर्त गति के आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।

उत्तर (i) कण की गति निश्चित बिन्दु के इधर-उधर हो।

(ii) कण पर कार्यरूप प्रत्यान्वयन बल सदैव उस निश्चित बिन्दु (साम्य स्थिति) से कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती हो।

(iii) बल (या त्वरण) सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट हो।

15. सरल आवर्त गति करते पिण्ड की कुल ऊर्जा पर टिप्पणी लिखिए।

उत्तर ∵ सरल आवर्त गति करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा

$$(K) = \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - y^2)$$

तथा सरल आवर्त गति करते पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा

$$(U) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

$$\therefore \text{कुल ऊर्जा } (E) = U + K = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

ITI Question Bank.com

1. आवर्ती गति तथा दोलनी गति से क्या तात्पर्य है?

What is the meaning of periodic motion and oscillatory motion?

उत्तर आवर्ती गति Periodic Motion “जब किसी निश्चित पथ पर गतिमान पिण्ड एक निश्चित समयान्तराल के पश्चात् सदैव अपनी पूर्ववत् अवस्था में आ जाता है और अपनी गति को बार-बार दोहराता है तो उसकी गति आवर्ती गति कहलाती है तथा वह निश्चित समयान्तराल आवर्तकाल T कहलाता है।” उदाहरणार्थ, लोलक की गति, घड़ी की सुइयों

की गति, चन्द्रमा के पृथ्वी के परितः घूमने की गति, पृथ्वी के अपनी आक्ष के परितः घूमने की गति, स्प्रिंग से लटके पिण्ड की ऊपर-नीचे की गति, बायंग वर्गे स्वर्गीय की भुजाओं की गति तथा द्रव में अंशिक रूप से दूबे पिण्ड की ऊपर-नीचे की गति आदि।

पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर 1 वर्ष में एक चक्कर लगाती है; अतः इसका आवर्तकाल 1 वर्ष है। चन्द्रमा पृथ्वी के चारों आर 27.3 दिन में एक चक्कर लगाता है; अतः इसका आवर्तकाल 27.3 दिन है। घड़ी में बिनट वाली सुई का आवर्तकाल 1 घण्टा तथा घण्टे वाली सुई का आवर्तकाल 12 घण्टे हैं।

दोलन गति अथवा कम्पनिक गति Oscillatory Motion of Vibratory Motion “आवर्ती गति में, जब कोई पिण्ड किसी पथ पर, किसी निश्चित बिन्दु (साम्य स्थिति) के इधर-उधर (to and fro) गति करता है तो पिण्ड की यह गति दोलनी गति अथवा कम्पनिक गति कहलाती है।” उदाहरणार्थ, सरल लोलक में गोलक की गति, स्वरित्र द्विभुज की भुजाओं की गति, दूला दूलती लड़वाई की गति आदि। दोलनी गति में पिण्ड का अपनी साम्य स्थिति से एक ओर जाना फिर उसी स्थिति में लौटकर आना, फिर दूसरी ओर जाना तथा पुनः उसी स्थिति में लौटकर आना 1 कम्पन अथवा 1 दोलन कहलाता है।

2. 'प्रणोदित दोलन' और 'अनुनाद' से आप क्या समझते हैं? अनुनाद की ऊव्रता तथा Q-फैक्टर परिभाषित कीजिए। (UPBTE, Sem-I, 2016)

What do you mean by 'forced oscillation' and 'resonance'? Define the terms sharpness of resonance and Q-factor.

उच्चर प्रणोदित दोलन Forced oscillation जब कोई पिण्ड

अपनी स्वाभाविक आवृत्ति से दोलन न करके किसी बाह्य बल की आवृत्ति से दोलन करता है तो इस प्रकार के दोलन को प्रणोदित दोलन कहते हैं। उदाहरण के लिये यदि सरल लोलक को हाथ से पकड़ कर दोलन कराया जाये तो यह प्रणोदित दोलन होगा।

अनुनाद Resonance यदि दोलन करते किसी पिण्ड की स्वाभाविक आवृत्ति तथा पिण्ड पर आरोपित बाह्य-बल की आवृत्ति समान हो जाये तो पिण्ड के दोलनों का आयाम एकाएक बहुत बढ़ जाता है। सरल आवर्त गति में इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

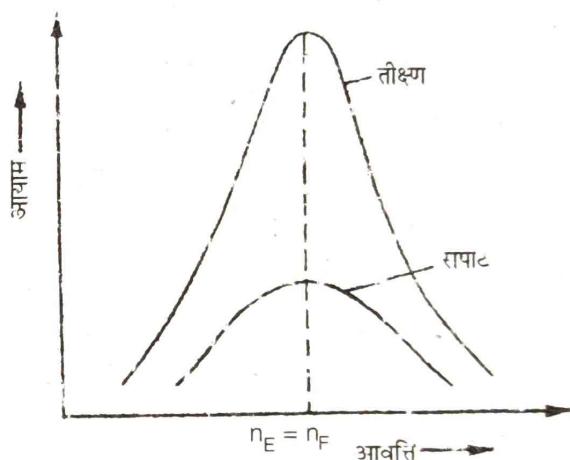
Q-गुणांक Q-Factor प्रणोदित दोलनों में अवमन्दन बलों के कारण होने वाली ऊर्जा हानि की पूर्ति बाह्य बलों के द्वारा की जाती है। Q-गुणांक किसी अवमन्दित दोलन प्रणाली की दक्षता की माप है। यह एक विमाविहीन राशि होती है। किसी अवमन्दित दोलन का Q-गुणांक (**Q-factor or quality factor**) दोलन के दौरान एकत्रित ऊर्जा तथा उसके एक कम्पन में क्षय ऊर्जा के अनुपात का 2π गुना होता है।

$$Q = 2\pi \left[\frac{\text{एकत्रित औसत ऊर्जा}}{\text{एक कम्पन में क्षय ऊर्जा}} \right]$$

मुक्त दोलन में ऊर्जा क्षय का मान शून्य होता है, अतः मुक्त दोलनों के लिये Q का मान अनंत होता है।

3. सरल आवर्त गति से क्या तात्पर्य है? इसके मुख्य अभिलक्षण (**characteristics**) बताइए। (UPBTE 2011)

What is the meaning of simple harmonic motion? Give its main characteristics.



चित्र 8.1

उत्तर सरल आवर्त गति जब कोई कण अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर एक सरल रेखा में इस प्रकार गति करता है कि इसका त्वरण (acceleration) प्रत्येक स्थिति में इसके विस्थापन का समानुपाती होता है तथा सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट होता है, तो कण की गति, सरल आवर्त गति कहलाती है तथा इसे S.H.M. कहते हैं।

सरल आवर्त गति के अभिलक्षण एक सरल आवर्त गति के मुख्य अभिलक्षण निम्नलिखित हैं

- इसमें कण एक सीधी रेखा में एक स्थिर बिन्दु (साम्य स्थिति) के इधर-उधर दोनों ओर आवर्त गति करता है।
- त्वरण, हमेशा उस रेखा में नियत बिन्दु (fixed point) की ओर निर्देशित करता है।
- त्वरण, हमेशा विस्थापन की दिशा के विपरीत तथा उस बिन्दु से, विस्थापन के समानुपाती (proportional) होता है।
- आयाम का परिमाण (magnitude of amplitude) सदैव, संदर्भित वृत्त (reference circle) के अर्धव्यास के बराबर होता है।
- कण का वेग अधिकतम होता है, जब यह अपनी औसत स्थिति से गुजरता है।
- S.H.M. का वेग आवर्ती (periodic) होता है।

1. 4. सरल आवर्त गति से आप क्या समझते हैं? सरल आवर्त गति करते हुए एक कण के विस्थापन के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। (UPBTE 2001)

What do you mean by simple harmonic motion? Derive an expression for the displacement of a particle in the simple harmonic motion.

उत्तर सरल आवर्त गति की परिभाषा प्रश्न 3 के उत्तर के अन्तर्गत देखिए।

सरल आवर्त गति की समीकरण माना, एक कण, स्थिर या समान कोणीय वेग ' ω ' के साथ एक r त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि पर विचरण कर रहा है, जैसा कि चित्र 8.2 में दर्शाया गया है। YY' अक्ष पर बिन्दु P से एक लम्ब खाँचते हैं जो YY' अक्ष को N बिन्दु पर काटता है।

यह वृत्त, एक संदर्भ वृत्त कहलाता है तथा P वृत्त का संदर्भित कण (reference particle) कहलाता है। माना कण X से P तक पहुँचने के लिये t सेकण्ड लेता है तथा इस t समय में θ° का कोण बनाता है। ($\angle POX = \theta$)

अतः कोणीय वेग,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{या} \quad \theta = \omega t \quad \dots(i)$$

t सेकण्ड में लम्ब का विस्थापन, ON है।

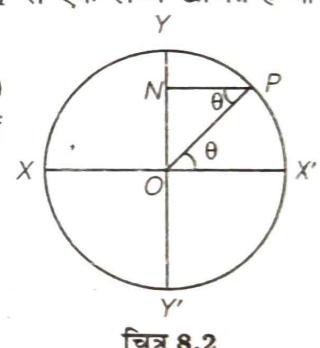
अब

$$ON = OP \sin \theta = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

(यहाँ पर $ON = y$ तथा $OP = r$)

θ का मान समी (ii) में रखने पर, $y = r \sin \omega t$

जो S.H.M. की विस्थापन समीकरण होती है।



चित्र 8.2

5. सरल आवर्त गति करने वाले एक पिण्ड का आवर्तकाल दो सेकण्ड है। कितने समय पश्चात् $t = 0$ समय से इसका विस्थापन इसके आयाम का आधा हो जायेगा? (UPBTE 2001)

The time period of a body in the simple harmonic motion is two seconds. After how long its displacement from $t = 0$ will become half of its amplitude?

उत्तर सरल आवर्त गति (S.H.M.) के विस्थापन y की समीकरण, $y = a \sin(\omega t + \phi)$ है।

जहाँ पर ' a ' आयाम है। यदि विस्थापन $t = 0$ पर शून्य है, दिया है।

तब,

$$0 = a \sin \phi \quad \text{या} \quad \phi = 0$$

$\therefore y = a \sin \omega t$ वैध वैध $\omega = \frac{2\pi}{T}$, जहाँ T आवर्तकाल (time period) होता है।

$$\therefore y = a \sin \frac{2\pi t}{T} \quad \dots(i)$$

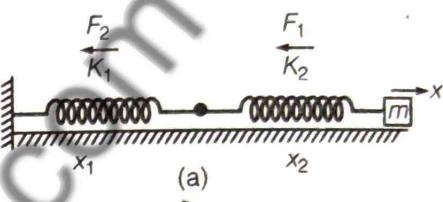
माना $t = 0$ से t' समय बाद विस्थापन आया है, तब $y = \frac{a}{2}$ तथा $t = t'$

$$\begin{aligned} y \text{ तथा } t \text{ के मान समी (i) में रखने पर, } \frac{a}{2} &= a \sin \frac{2\pi t'}{T} \quad \text{या } \frac{2\pi t'}{T} = \frac{1}{2} \\ \text{या } \sin \frac{2\pi t'}{T} &= \frac{1}{2} \quad \text{या } \pi t' = 30^\circ \\ \text{या } t' &= \frac{1}{6} \text{ sec} \end{aligned} \quad [\because T = 2]$$

6. दो क्षैतिज स्प्रिंगों से जुड़े द्रव्यमान की गति समझाइए।

Explain the motion of mass that is joined with two horizontal springs.

उच्चर दो क्षैतिज स्प्रिंगों से जुड़े द्रव्यमानों की गति दो क्षैतिज स्प्रिंगों से जुड़े द्रव्यमान की गति का वर्णन निम्न प्रकार है



(a)

चित्र 8.3

- माना दो क्षैतिज स्प्रिंगों जिनके बल नियतांक क्रमशः K_1 व K_2 हैं चित्रानुसार श्रेणी क्रम में जुड़ी हैं। स्प्रिंगों का एक सिरा m द्रव्यमान के पिण्ड से तथा दूसरा दृढ़ दीवार से बँधा है। m द्रव्यमान का पिण्ड घर्षणरहित क्षैतिज तल पर चलने के लिये स्वतंत्र है। माना पिण्ड को, साम्य स्थिति से दायीं ओर खींचकर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है तथा दोनों स्प्रिंगों की लम्बाई में वृद्धि क्रमशः x_1 व x_2 है, तब $x = x_1 + x_2$ चूंकि दोनों स्प्रिंगें श्रेणी क्रम (series) में जुड़ी हैं, अतः प्रत्येक स्प्रिंग m द्रव्यमान के पिण्ड पर एकसमान प्रत्यानयन बल F लगायेगी।

$$\text{अर्थात् } F = -K_1 x_1 \quad \text{तथा} \quad F = -K_2 x_2$$

या

$$x_1 = -\frac{F}{K_1} \quad \text{तथा} \quad x_2 = -\frac{F}{K_2}$$

$$\therefore x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{K_1} + \left(-\frac{F}{K_2} \right) = -F \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

या

$$x = -F \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 \cdot K_2} \right)$$

या प्रत्यानयन बल,

$$F = -\frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cdot x \quad \dots(i)$$

यदि श्रेणी क्रम में जुड़ी दोनों स्प्रिंगों का प्रभावी बल नियतांक (effective force constant) K हो, तो हुक के नियम से,

$$F = -K \cdot x \quad \dots(ii)$$

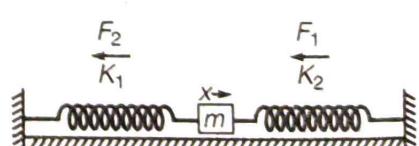
समीकरण (i) व (ii) की तुलना करने पर,

प्रभावी बल नियतांक

$$K = -\frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

अतः पिण्ड का आवर्तकाल;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_1 K_2 / (K_1 + K_2)}}$$



(b)

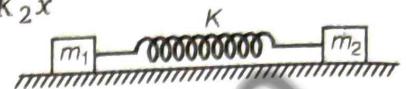
चित्र 8.3

- माना दो क्षैतिज स्प्रिंगों जिनके बल नियतांक क्रमशः K_1 व K_2 हैं चित्रानुसार द्रव्यमान m तथा दृढ़ आधारों से जुड़ी हैं। माना m द्रव्यमान वाले पिण्ड को साम्य स्थिति से दायीं ओर खींचकर x दूरी तक संपीड़ित (compressed) हो जाती है, जबकि बायीं स्प्रिंग x दूरी पर विस्तारित

(extend) हो जाती है। अतः दोनों स्प्रिंगों द्वारा पिण्ड 'm' पर लगाया गया प्रत्यानयन बल एक ही दिशा में होता है, जबकि उसका मान अलग-अलग होता है, जो पिण्ड को सम्यावस्था में लाने का प्रयास करता है। माना दोनों स्प्रिंगों में उत्पन्न प्रत्यानयन बल क्रमशः F_1 व F_2 हैं, तो

$$F_1 = -K_1 x \quad \text{तथा} \quad F_2 = -K_2 x$$

अतः पिण्ड पर लगने वाला कुल प्रत्यानयन बल



चित्र 8.4

या

या

या

अतः पिण्ड का आवर्तकाल,

$$F = F_1 + F_2$$

$$= -K_1 x + (-K_2 x) \quad (\because \text{प्रत्यानयन बल एक ही दिशा में है})$$

$$= -(K_1 + K_2) \cdot x$$

$$F = -K \cdot x \quad (K = K_1 + K_2 = \text{संयोजन का प्रभावी बल नियतांक})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(K_1 + K_2)}}$$

नोट यदि किसी क्षैतिज स्प्रिंग (बल नियतांक K) के विपरीत सिरों पर m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड चित्रानुसार बँधे हैं, तो संयोजन का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{K}}$$

$$\text{जहाँ, } m_0 = \text{समानीत द्रव्यमान} \text{ (reduced mass)} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\left[\because \frac{1}{m_0} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]$$

7. दो स्प्रिंग, जिनके बल नियतांक K_1 व K_2 हैं, एक-दूसरे से सिरों पर जुड़ी हैं और उन्हें एक आधार से लटकाया हुआ है। एक m द्रव्यमान का पिण्ड स्प्रिंग के निचले सिरे से लटका हुआ है। पिण्ड का दोलनकाल ज्ञात कीजिए।

(UPBTE 2002)

Two springs whose force constants are K_1 and K_2 ; connect to each other on ends and they are hanged on a base. An object of mass 'm' hang from the bottom surface of the spring. Find the oscillation time period of object.

हल दिया है, दो स्प्रिंग S_1 एवं S_2 हैं तथा उनके बल नियतांक K_1 व K_2 हैं और वे एक-दूसरे से जुड़ी हैं। माना स्प्रिंग S_1 तथा S_2 की लम्बाई में वृद्धि क्रमशः x_1 तथा x_2 है। यदि कुल वृद्धि x है (पिण्ड पर m द्रव्यमान लटकाने से), तब

$$x = x_1 + x_2$$

...(i)

क्योंकि S_1 तथा S_2 श्रेणी में हैं, तो उनका परिणामी बल (resultant) बराबर होगा।

$$\text{अतः} \quad F = -K_1 \times x_1 \quad \text{या} \quad x_1 = -\frac{F}{K_1}$$

$$\text{तथा} \quad F = -K_2 \times x_2 \quad \text{या} \quad x_2 = -\frac{F}{K_2}$$

समी (i) में x_1 तथा x_2 का मान रखने पर,

$$x = -\frac{F}{K_1} + \left(-\frac{F}{K_2} \right) = -F \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)$$

$$F = -x \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)$$



चित्र 8.5

माना दोनों स्प्रिंगों का संयुक्त बल नियतांक K है, तब परिणामी बल (resultant) बल,

$$F = -Kx \quad \dots(\text{ii})$$

अब $K = \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)$ $\dots(\text{iii})$

अतः पिण्ड का आवर्तकाल S.H.M. में, $T = 2\pi\sqrt{m/K}$
 K का मान रखने पर,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right)}} \quad \text{या} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}}$$

8. सरल आवर्त गति करती हुई किसी वस्तु का आवर्तकाल 12 सेकण्ड तथा आयाम 8 सेमी है। एक सिरे से 3 सेमी की दूरी तय करने में इसे कितना समय लगेगा?

The time period of an object in a simple harmonic motion is 12 seconds and the displacement is 8 cm. How long time will it take to cover a distance of 3 cm from one end?

हल सरल आवर्त गति कर रहे कण की विस्थापन समीकरण,

$$y = a \sin \omega t \quad \dots(\text{i})$$

प्रश्नानुसार, कण का आयाम 8 सेमी है, अतः जब कण एक सिरे से 3 सेमी पर होगा तब मध्यमान स्थिति से उसकी दूरी $y = 8 - 3 = 5$ सेमी होगी। मध्यमान स्थिति से 5 सेमी दूरी तय करने में लगा समय समी (i) से ज्ञात किया जा सकता है। समी (i) से,

$$y = a \sin \omega t \quad \text{या} \quad y = a \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad \left[\because \omega = \frac{2\pi}{T} \right]$$

$$\text{या} \quad 5 = 8 \sin \frac{2\pi}{12} \cdot t \quad [\text{y, a, T के मान रखने पर}]$$

$$\text{या} \quad \frac{5}{8} = \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot t \right)$$

$$\text{या} \quad \frac{\pi}{6} \cdot t = \sin^{-1} \left(\frac{5}{8} \right) = 38^\circ 41' = 38.7^\circ$$

$$\therefore t = \frac{38.7}{30} = 1.29 \text{ सेकण्ड}$$

चूंकि गति करने वाली वस्तु का आवर्तकाल 12 सेकण्ड है, अतः मध्यमान स्थिति से एक ओर जाने का समय 3 सेकण्ड होगा। इसलिए एक सिरे से 3 सेमी दूरी तय करने में लगा समय

$$= 3 - 1.29 = 1.71 \text{ सेकण्ड}$$

9. एक कण 0.08 मीटर के आयाम से सरल आवर्त गति में कम्पन कर रहा है। इसके सन्तुलन की स्थिति से कितने विस्थापन पर इसकी स्थितिज ऊर्जा इसकी सम्पूर्ण ऊर्जा की आधी होगी?

A particle is vibrating in a simple harmonic motion with the amplitude of 0.08 meter. At how much displacement from its balance position, its potential energy will be half of its total energy?

हल सरल आवर्त गति में स्थितिज ऊर्जा, $P.E. = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$, जहाँ y विस्थापन है।

सरल आवर्त गति कर रहे कण की सम्पूर्ण ऊर्जा,

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2, \text{ जहाँ } a = \text{आयाम}$$

प्रश्नानुसार, कण के सन्तुलन की स्थिति में, $P \cdot E. = \frac{1}{2} E$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \right) \text{ या } y^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{या } y = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{0.08}{1.41} = 0.056 \text{ मी}$$

10. एक हल्के स्प्रिंग से 1 किग्रा का बॉट लटकाने से वह 1 सेकण्ड में चार दोलन करता है। उसी स्प्रिंग से 4 किग्रा का बॉट लटकाने पर वह प्रति सेकण्ड कितने दोलन करेगा? (UPBTE 2000)

On hanging a 1 kg weight from a light spring, it makes 4 oscillations will it in 1 second. If you hang 4 kg weight from the same spring, how much oscillations make in per second?

उल्लंघन स्प्रिंग का दोलनकाल, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

(जहाँ, K = स्प्रिंग नियतांक)

$$\text{अतः स्प्रिंग का आवर्तकाल, } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

प्रथम स्थिति दिया है, $f = 4$ दोलन/सेकण्ड, जब $m = 1$ किग्रा

$$4 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{1}} \quad \dots(i)$$

द्वितीय स्थिति माना $f = f_1 = ?$, जब $m = 4$ किग्रा

$$\text{तो } f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{4}} \quad \dots(ii)$$

$$\text{समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर, } \frac{f_1}{4} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{या } f_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ दोलन/सेकण्ड}$$

11. गुरुत्वीय त्वरण 'g' के मान में परिवर्तन कैसे होता है?

How the value of gravitational acceleration (g) changes?

उच्चर गुरुत्वीय त्वरण 'g' के मान में परिवर्तन गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान पृथ्वी तल पर भिन्न-भिन्न स्थानों पर

भिन्न-भिन्न होता है। पृथ्वी तल पर 'g' का मान भूमध्य रेखा पर सबसे कम और ध्रुवों (poles) पर सबसे अधिक होता है; क्योंकि भूमध्य रेखा पर पृथ्वी की त्रिज्या, ध्रुवों पर पृथ्वी की त्रिज्या से लगभग 21 किमी अधिक होती है।

पृथ्वी तल के ऊपर जाने पर g का मान घटता जाता है तथा पृथ्वी तल के नीचे जाने पर भी g का मान घटता जाता है। इसीलिए पृथ्वी के केन्द्र पर g का मान शून्य हो जाता है।

चूंकि 'g' का मान एक स्थान से दूसरे स्थान पर बदलता जाता है, अतः इसका प्रामाणिक मान 45° अक्षांश पर समुद्र तल पर लिया गया है। यह प्रामाणिक मान 9.80 मी/से^2 है।

12. 1 मी लम्बा एक सरल लोलक है। उसके bob (गोलक) को 60° द्वारा विक्षेपित किया गया। अब bob को छोड़ दिया गया। जब रस्सी ऊर्ध्वाधर दिशा से गुजर रही हो, उस समय bob की velocity (वेग) ज्ञात कीजिए। ($g = 9.8 \text{ मी/से}^2$)

There is a simple pendulum whose length is 1 m. Its bob is deflected by 60° . Now, the bob is left. When the rope is going through vertical direction then, find the velocity of bob at that time. ($g = 9.8 \text{ m/sec}^2$)

उल्लंघन चित्र 8.6 में, $\frac{OC}{OB} = \cos 60^\circ$
 $OC = OB \cos 60^\circ$

या

$$OC = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ मी}$$

∴

$$h = OA - OC = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ मी}$$

$$B \text{ पर स्थितिज ऊर्जा} = mgh$$

तथा

$$A \text{ पर गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} mv^2$$

∴ B की स्थितिज ऊर्जा ही A पर गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती है।

अतः

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh \quad \text{या} \quad \frac{1}{2} v^2 = gh$$

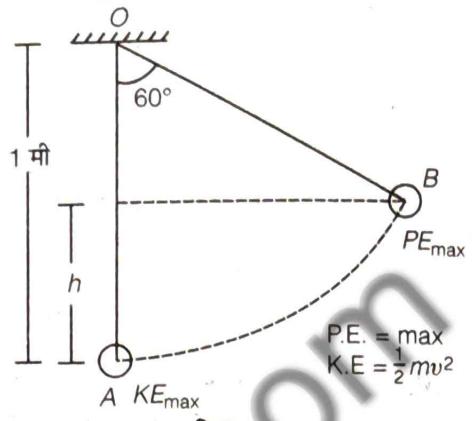
∴

$$v = \sqrt{(2gh)}$$

या

$$v = \sqrt{\left(2 \times 9.8 \times \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{9.8} \text{ मी/से} = 3.13 \text{ मी/से}$$



चित्र 8.6

13. सरल आवर्त गति करते हुए पिण्ड की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। सिद्ध कीजिए कि सम्पूर्ण ऊर्जा दोलन के आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है। (UPBTE 2002)

Obtain the expression for simple harmonic motion of the object for kinetic and potential energy. Prove that the total energy is proportional to the square of the amplitude of oscillation.

उत्तर माना किसी पिण्ड के कण का आवर्त गति करते हुए द्रव्यमान m , आयाम a तथा आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$ है, जहाँ ω

कोणीय वेग है तथा t सेकण्ड बाद विस्थापन y है।

$$\text{पिण्ड के कण की गतिज ऊर्जा (K.E.)} = \frac{1}{2} mv^2 \quad \dots(i)$$

लेकिन कण का वेग

v का मान समी (i) में रखने पर,

$$v = \omega \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2} m [\omega \sqrt{(a^2 - y^2)}]^2$$

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - y^2) \quad \dots(ii)$$

अधिकतम स्थितिज ऊर्जा

माना कि सरल आवर्त गति करते पिण्ड में त्वरण α है, तब $\alpha = -\omega^2 y$

$$F = m \times \text{त्वरण} = m \times (-\omega^2 y) = -m\omega^2 y$$

अब

अतः पिण्ड में स्थितिज ऊर्जा, प्रत्यानयन बल, F के विरुद्ध किये गये कार्य के बराबर है।

तब-

$$\text{P.E.} = \frac{1}{2} \times F \times y = \frac{1}{2} \times (-m\omega^2 y) \times y$$

$$\text{P.E.} = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 \quad \dots(iii)$$

अतः सम्पूर्ण ऊर्जा = K.E. + P.E.

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - y^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \text{ या } 2\pi^2 mn^2 a^2$$

$[\because \omega = 2\pi n]$

अतः

$$\text{कुल ऊर्जा} = 2\pi^2 mn^2 a^2$$

कण की सम्पूर्ण ऊर्जा $\propto a^2$, कण की सम्पूर्ण ऊर्जा $\propto n^2$

कण की सम्पूर्ण ऊर्जा $\propto m$

इसलिए, पिण्ड की कुल ऊर्जा, S.H.M. में आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है।

14. एक सरल लोलक की क्या आवश्यकताएँ होती है? सिद्ध कीजिये कि कम विस्थापन के लिए इसकी गति सरल आवर्त गति होगी? (UPBTE 2004, 12)

What are the requirements of simple pendulum? Prove that its speed will be simple harmonic motion for low displacement.

अथवा सरल लोलक के लिए मूलभूत आवश्यकताओं का उल्लेख कीजिए।

Mention the basic requirements for a simple pendulum.

उत्तर सरल लोलक की आवश्यकताएँ एक आदर्श सरल लोलक की

निम्नलिखित आवश्यकताएँ होती हैं—

1. एक सरल लोलक की डोरी ठीक लचकदार तथा भारहीन होनी चाहिये।
2. एक सरल लोलक की डोरी की लम्बाई में बढ़ोतरी नहीं होनी चाहिए, जब उस पर भार लटकाया जाये।
3. जैसा कि चित्र 8.7 में दर्शाया गया है, एक सरल लोलक में लोलक एक भारी बिन्दु द्रव्यमान (point mass) की तरह होना चाहिये।

चित्रानुसार, डोरी का तनाव 'T' तथा $mg \cos \theta$ एक-दूसरे को संतुलित करते हैं, जबकि $mg \sin \theta$, लोलक को बिन्दु A की ओर धकेलने की कोशिश करता है। इसे प्रत्यानयन बल (restoring force) कहते हैं।

अतः

$$F = -mg \sin \theta \quad \dots(i)$$

समी (i) में ऋण चिह्न बल F, विस्थापन (AB) के विपरीत दिशा में है, क्योंकि θ बहुत छोटा होता है, इसे शून्य के बराबर मानते हैं।

अर्थात्

$$\theta = 0$$

$\therefore \sin \theta = \theta$, यदि विस्थापन बहुत कम है, तो

$$F = -mg\theta = -mg \times \frac{x}{l}$$

या

$$ma = -\frac{mg \cdot x}{l}$$

$$[\because \theta = \frac{AB}{त्रिज्या} = \frac{x}{l} \text{ तथा } F = ma]$$

तथा

$$\text{त्वरण } a = -\frac{mgx}{lm}$$

या

$$a = -\frac{gx}{l}$$

या

$$a = -\omega^2 x$$

या

$$a \propto -x$$

$$[\because x/l = \omega^2]$$

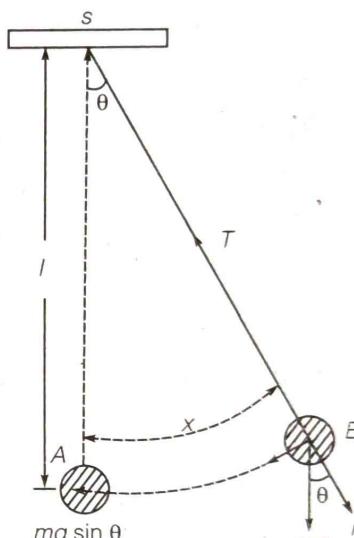
इसलिए यह सिद्ध होता है कि सरल लोलक की गति, सरल आवर्त गति (S.H.M.) होती है तथा आवर्तकाल,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} = 2\pi\sqrt{l/g}$$

$$(\because \omega = \sqrt{g/l})$$

या

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$



चित्र 8.7

15. अनुनाद से आप क्या समझते हैं? स्वतन्त्र, अवरोधित (अवमन्दित) तथा प्रणोदित कम्पनों में भेद कीजिए।
(UPBTE 2006, 11)

What do you understand by resonance? Differentiate among independent, obstructed (damp) and force oscillations.

अथवा प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

UPBTE 2010

Write a short note on force oscillation and resonance.

अथवा अवमन्दित और प्रणोदित कम्पनों में भेद कीजिए।

UPBTE 2014

Differentiate in between damp and force oscillation.

उत्तर अनुनाद अनुनाद एक विशेष प्रकार का बलित दोलन या कम्पन होता है। जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य आवर्ती बल अरोपित किया जाता है जिसकी आवृत्ति वस्तु की स्वाभाविक आवृत्ति से भिन्न है, तो वह वस्तु उस बल की आवृत्ति से प्रणोदित कम्पन अथवा दोलन करने लगती है। इन कम्पनों का आयाम प्रायः छोटा होता है, परन्तु यदि बाहरी बल की आवर्ती वस्तु की स्वाभाविक आवर्ती के बराबर हो, तो वस्तु के प्रणोदित कम्पनों का आयाम बहुत अधिक हो जाता है। इस क्रिया को अनुनाद कहते हैं।

स्वतन्त्र कम्पन जब किसी दोलन के योग्य वाली वस्तु को इसकी साम्य स्थिति से कुछ विस्थापित कर दिया जाये तब विस्थापित करने वाले बल को हटा लेने पर यह एक निश्चित तथा प्राकृतिक आवृत्ति से दोलन करती रहती है। वस्तु का यह दोलन स्वतन्त्र दोलन कहलाता है।

अवरोधित कम्पन व्यवहार में मुक्त दोलन प्राप्त करना सम्भव नहीं होता है;

क्योंकि वायु के घर्षण के कारण, एक विपरीत बल, मुक्त दोलन के विरुद्ध कार्य करता है जो कम्पन को अवरोधित करता है और अन्त में दोलन शून्य हो जाता है, इस प्रकार के कम्पन या दोलन कहते हैं।

प्रणोदित कम्पन जब कोई पिण्ड अपनी स्वाभाविक आवृत्ति से कम्पन न करके

किसी बाह्य बल की आवृत्ति से कम्पन करता है तो इस प्रकार के कम्पन को प्रणोदित कम्पन या दोलन कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि सरल लोलक को हाथ से पकड़ कर दोलन कराया जाये तो यह प्रणोदित दोलन होगा।

16. 2×10^3 न्यूटन/मीटर नियतांक वाली स्प्रिंग के सिरों पर क्रमशः 30 ग्राम और 70 ग्राम के द्रव्यमान जुड़े हैं, उनके दोलन की आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

(UPBTE 2005)

Find out the frequency of the oscillation of the masses 30 grams and 70 grams respectively that are joined on the ends of spring having constant 2×10^3 Newton/meter.

हल दिया है,

स्प्रिंग का बल नियतांक, $K = 2 \times 10^3$ न्यूटन/मीटर

$$m_1 = 30 \text{ ग्राम या } 0.03 \text{ किग्रा}$$

$$m_2 = 70 \text{ ग्राम या } 0.07 \text{ किग्रा}$$

माना निकाय का घटा हुआ द्रव्यमान m_0 है, तब,

$$m_0 = \frac{m_1 \times m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.03 \times 0.07}{0.03 + 0.07} \quad \left[\because \frac{1}{m_0} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]$$

$$m_0 = 21 \times 10^{-3} \text{ किग्रा}$$

दोलन की नयी आवृत्ति,

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_0}} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{21 \times 10^{-3}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{21} \times 10^3} \\ &= \frac{10^3}{2\pi\sqrt{10.5}} = 49 \text{ दोलन प्रति सेकण्ड} \end{aligned}$$

या

20. दर्शाइये कि लघु आयाम के लिए एक सरल लोलक की गति, सरल आवर्त गति होती है। इसका आवर्तकाल किस प्रकार प्रभावित होगा, यदि

- (i) लोलक को उपग्रह पर ले जायें, (ii) लोलक की लम्बाई अनन्त हो जाये।

Demonstrate that the speed of a simple pendulum for small amplitude is simple harmonic motion. How its time period will get affected? If

- (i) The simple pendulum will be taken to the satellite

- (ii) The length of the simple pendulum becomes infinite.

उत्तर यदि एक सूक्ष्म आकार के भारी धातु के गोले को भारहीन, लम्बी, न बढ़ सकने वाले पूर्ण लचकदार धागे के निचले सिरे से बाँधकर धागे के ऊपरी सिरे को बद्ध कर दिया जाये, तो यह समायोजन 'सरल लोलक' कहलाता है। गोले के केन्द्र से निलम्बन बिन्दु तक की दूरी को सरल लोलक की प्रभावी लम्बाई कहते हैं। जब लोलक को साम्य स्थिति से थोड़ा-सा हटाकर छोड़ देते हैं, तो वह अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर कम्पन करने लगता है।

चित्रानुसार,

$$OU = l$$

माना लोलक को उसकी विराम स्थिति U से एक ओर B स्थिति तक विस्थापित किया जाता है। माना लोलक का विस्थापन, $UR = x$ हो; तो

$$\angle UOR = \theta \text{ रेडियन} = \frac{x}{l}$$

यदि लोलक का द्रव्यमान m हो, तो विस्थापित R की स्थिति में लोलक पर निम्न बल होंगे—भार mg ऊर्ध्वाधर दिशा में नीचे की ओर, डोरी का तनाव T , RO दिशा में mg के ऊर्ध्वाधर तथा अक्षीय घटक क्रमशः $mg \cos \theta$ तथा $mg \sin \theta$ (प्रत्यानयन बल) होंगे। प्रत्यानयन बल ऋणात्मक होता है। प्रत्यानयन बल के कारण लोलक में उत्पन्न त्वरण माना α है तब

$$\text{त्वरण, } \alpha = \frac{\text{बल}}{\text{द्रव्यमान}} = \frac{-mg \sin \theta}{m} = -g \sin \theta$$

यदि कोण θ बहुत छोटा है, तब $\sin \theta = \theta$ रेडियन

$$\text{तब } \alpha = -g\theta = -g \frac{x}{l} \quad \text{या } \alpha = \frac{-g}{l} \times x$$

$$\text{या } \alpha = -kx \quad (\text{जहाँ, } k \text{ एक नियतांक है})$$

त्वरण (α) \propto विस्थापन (x)

अर्थात् लोलक का त्वरण माध्य स्थिति से विस्थापन के समानुपाती है जो सरल आवर्त गति की आवश्यक शर्त है, अतः कम विस्थापन के लिए सरल लोलक की गति आवर्त गति होती है।

- (i) लोलक को यदि किसी उपग्रह पर ले जायें तो $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, g का मान घटता है।

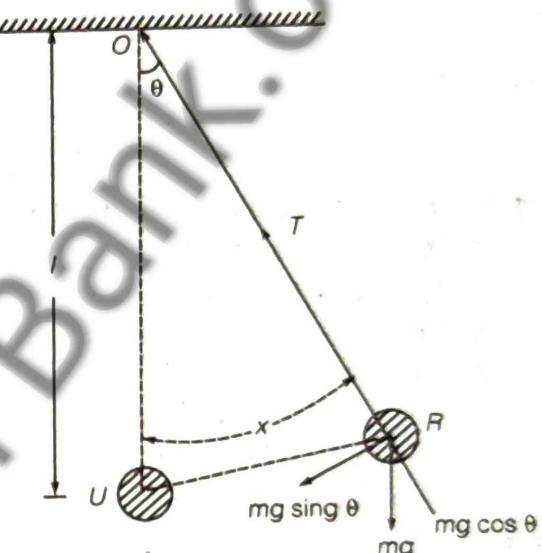
इस प्रकार लोलक को यदि किसी उपग्रह पर ले जायें तो आवर्तकाल बढ़ जाता है।

- (ii) लोलक की लम्बाई अनन्त होने पर उसका आवर्तकाल 84.6 मिनट होता है।

21. किसी अनन्त लम्बाई के सरल लोलक के आवर्तकाल के सूत्र की उत्पत्ति कीजिए। (UPBTE 2010, 12)

Generate formula for the time period of simple pendulum of infinite length.

उत्तर सरल लोलक का आवर्तकाल लोलक की लम्बाई के वर्गमूल के समानुपाती होता है। अतः ऐसा लगता है कि 1 अनन्त होने पर T भी अनन्त होगा परन्तु ऐसा नहीं है।



चित्र 8.9

यदि अनन्त लम्बाई का सरल लोलक दोलन करता है, तो उसका विस्थापन सरल रेखा में होता है। योंद्वारा लोलक के गोले का साम्य स्थिति P से विस्थापन x हो, तो बिन्दु Q पर गोले पर लगने वाला बल,

$$mg = \text{पृथ्वी के केन्द्र की ओर गोले का भार}$$

$$mg \cos \theta = \text{गोले के भार का क्षैतिज घटक}$$

$mg \cos \theta$ के कारण गोला साम्य स्थिति की ओर आने का प्रयास करता है। अतः यही प्रत्यानयन बल है। इसलिए,

$$F = -mg \cos \theta$$

-ve चिह्न इसलिए है, क्योंकि प्रत्यानयन बल की दिशा विस्थापन के विपरीत है।

अब ΔOPQ में,

$$\cos \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{x}{R_e}, \text{ जहाँ } R_e \text{ पृथ्वी की त्रिज्या है।}$$

अतः

$$F = -mg \frac{x}{R_e} \quad \dots(i)$$

यदि गोले का द्रव्यमान m तथा त्वरण A हो तो प्रत्यानयन बल

$$F = mA \quad \dots(ii)$$

समी (i) व (ii) से,

$$mA = -mg \frac{x}{R_e}$$

या

$$\frac{x}{A} = -\frac{R_e}{g}$$

-ve चिह्न छोड़ने पर,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

22. दोलन करते सरल लोलक की गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का परिवर्तन ग्राफ दिखाइए।

(UPBTE 2010, 12)

Show the transformation graph of kinetic energy and potential energy for oscillation of a simple pendulum.

उच्चर दोलन गति करते हुए किसी पिण्ड की गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा के योग को कुल ऊर्जा कहते हैं। इसलिए पिण्ड की कुल ऊर्जा

$$E = U + K$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 - y^2)$$

या

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

यदि घर्षण इत्यादि कारणों से ऊर्जा हानि न हो रही हो, तो दोलन गति करते हुए किसी पिण्ड की कुल ऊर्जा सदैव नियत रहती है।

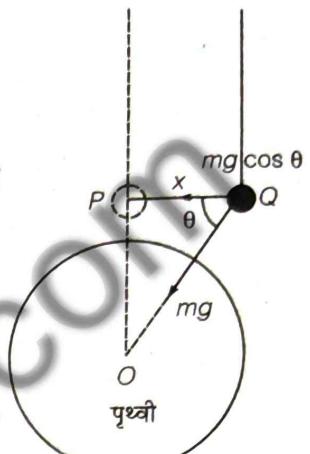
हम जानते हैं कि $\omega = 2\pi n$, जहाँ n आवृत्ति है।

तब कुल ऊर्जा,

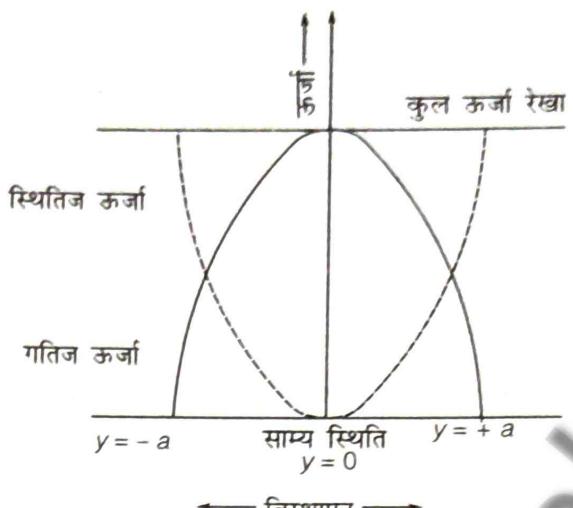
$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 = \frac{1}{2} m(2\pi n)^2 a^2$$

अतः

$$E = 2m\pi^2 n^2 a^2$$



चित्र 8.10



चित्र 8.11 सरल आवर्त गति करते पिण्ड में ऊर्जा परिवर्तन

चित्र 8.11 में स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा का ब्रह्म एकसाथ दिखाया गया है। चित्र से स्पष्ट है कि किसी भी स्थिति में दोनों ऊर्जाओं का योग कुल ऊर्जा के बराबर होता है। साथ ही यह भी परिलक्षित होता है कि दोनों ऊर्जाएँ परस्पर एक-दूसरे में रूपान्तरित होती रहती हैं। इसलिए यह एक प्रकार से ऊर्जा संरक्षण का सिद्धांत ही है।

नोट

1. कुल ऊर्जा आवृत्ति तथा आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है, अतः $E \propto n^2$ तथा $E \propto a^2$
2. सरल आवर्त गति में ऊर्जा परिवर्तन की आवृत्ति आवर्त गति की आवृत्ति की दोगुनी होती है।

23. एक तनी हुई डोरी के अनुप्रस्थ कम्पनों का आवर्तकाल इसकी लम्बाई, तनाव तथा प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान पर निर्भर करता है। विमीय विधि का उपयोग करके, इसके आवर्तकाल का सूत्र ज्ञात कीजिए।
(UPBTE 2016)

The time period of vibrations across a stretched rope depends on its length, tension and per unit mass length. Find the formula for time period by using dimension method.

उत्तर माना आवर्तकाल T , लम्बाई l की घात a , तनाव F की घात b तथा प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान m की घात c पर निर्भर करता है।

$$T' \propto l^a F^b m^c$$

$$T' = K l^a F^b m^c$$

जहाँ K एक नियतांक है।

$$[T] = [L]^a [MLT^{-2}]^b [ML^{-1}]^c$$

$$[T] = [M^{b+c}] [L^{a+b-c}] [T^{-2b}]$$

घातों की तुलना करने पर

$$b + c = 0 \quad \dots(i)$$

$$a + b - c = 0 \quad \dots(ii)$$

$$-2b = 1 \quad \dots(iii)$$

समी० (iii) से,

$$b = -\frac{1}{2}$$

b का मान समी० (i) में रखने पर

$$c = \frac{1}{2}$$

b तथा c के मान समी० (iii) में रखने पर

$$a - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$a = 1$$

अतः

$$[T] = [L]^1 [MLT^{-2}]^{-1/2} [M]^{1/2}$$

$$[T] = K(l) (F)^{-1/2} (m)^{1/2}$$

$$[T] = Kl \sqrt{\frac{m}{F}}$$

[$\because K$ एक नियंत्रक है।]

प्र० 24. 'आवर्त गति' तथा 'सरल आवर्त गति' में अन्तर बताइए। दर्शाइए कि कम विस्थापन की दशा में एक सरल लोलक, सरल आवर्त गति करता है। (UPBTE 2016)

Explain the difference in harmonic motion and simple harmonic motion. Show that in the case of low displacement, a simple pendulum moves in simple harmonic motion.

उत्तर आवर्त गति— जब कोई पिण्ड एक निश्चित समय अन्तराल (time interval) पश्चात् निश्चित पथ पर अपनी गति की पुनरावृत्ति करे तो इस प्रकार की गति को आवर्त गति कहते हैं।

उदाहरणार्थ

- (1) सूर्य के चारों ओर पृथ्वी की परिक्रमा दीर्घवृत्ताकार पथ पर एक वर्ष में पूर्ण होती है।
- (2) पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति एक दिन में पूर्ण होती है।
- (3) घड़ी की सुइयों की वृत्ताकार पथ पर गति जिसमें सेकण्ड वाली सुई, मिनट वाली सुई तथा घण्टे वाली सुई के आवर्तकाल क्रमशः एक मिनट, एक घण्टा तथा 12 घण्टे होते हैं।
- (4) सरल लोलक की दोलन गति
- (5) स्प्रिंग से लटके द्रव्यमान की गति इत्यादि।

सरल आवर्त गति जब कोई कण अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर एक सरल रेखा में इस प्रकार गति करता है कि इसका त्वरण (Acceleration) प्रत्येक स्थिति में इसके विस्थापन का समानुपाती होता है तथा सदैव साम्य स्थिति की ओर दिष्ट होता है, तो कण की गति, सरल आवर्त गति कहलाती है तथा इसे S.H.M. कहते हैं।

कम विस्थापन की दशा में सरल लोलक की आवर्त गति

चित्रानुसार, डोरी का तनाव T तथा $mg \cos \theta$ एक-दूसरे को संतुलित करते हैं, जबकि $mg \sin \theta$, लोलक को बिन्दु A की ओर धकेलने की कोशिश करता है। इसे प्रत्यानयन बल (Restoring Force) कहते हैं।

अतः

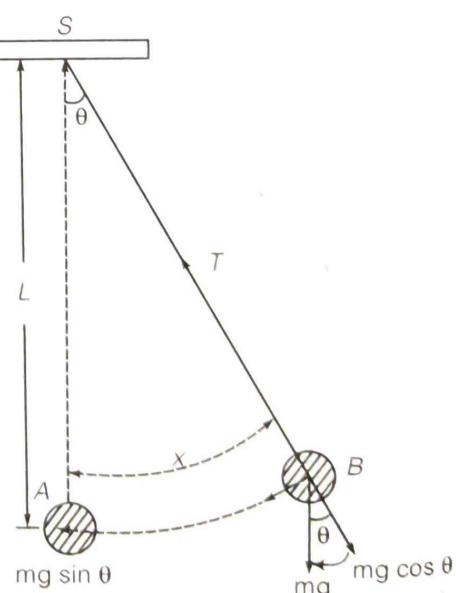
$$F = -mg \sin \theta \quad \dots(i)$$

समी० (i) में ऋण चिह्न बल F , विस्थापन (AB) की विपरीत दिशा में है क्योंकि कोणीय विस्थापन θ बहुत छोटा होता है, इसे शून्य के बराबर मानते हैं।

अर्थात्

$$\theta = 0$$

$\therefore \sin \theta \approx \theta$, यदि विस्थापन बहुत कम है तो,



चित्र 8.12

$$F = -mg\theta = -mg \times \frac{x}{l}$$

या $ma = -\frac{mg \cdot x}{l}$ $[\because \theta = \frac{AB}{त्रिज्या} = \frac{x}{l}$ तथा $F = ma]$

तथा त्वरण $a = -\frac{mgx}{lm}$ या $a = -\frac{gx}{l}$

या $a = -\omega^2 x$ या $a \propto -x$ $[\because x/l = \omega^2]$

इसलिए यह सिद्ध होता है कि सरल लोलक की गति, सरल आवर्त गति (S.H.M.) होती है तथा आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (\omega = \sqrt{g/l})$$

या $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

य 25. स्प्रिंग से बँधे एक द्रव्यमान के दोलनकाल के लिए सूत्र स्थापित कीजिए। (UPBTE, Sem-I, 2016)

Derive the formula for time period of oscillation for a mass attached to spring.

उत्तर चित्र 8.13 (a) में m द्रव्यमान का एक पिण्ड किसी स्प्रिंग से बँधा हुआ दिखाया गया है। स्प्रिंग का बल नियतांक K है। स्प्रिंग में इकाई विक्षेप उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल का मान K के बराबर होता है। इसलिये $K = \frac{F}{x}$ से स्प्रिंग में x विक्षेप

उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल का मान $F = Kx$ होगा। पिण्ड तथा क्षेत्रिज तल के मध्य घर्षण गुणांक का मान शून्य है। अब माना कि पिण्ड को दायीं ओर x दूरी पर विस्थापित किया जाता है। इस रिंचाव के कारण स्प्रिंग प्रत्यानयन बल F लगाने लगती है। प्रत्यानयन बल द्रव्यमान को पुनः साम्य स्थिति O पर लाने का प्रयास करता है चित्र 8.13 (b)। पिण्ड को छोड़ने पर पिण्ड साम्य स्थिति के इधर-उधर दोलन करने लगता है।

हम जानते हैं कि प्रत्यानयन बल की दिशा सदैव विस्थापन की दिशा के विपरीत होती है। अतः प्रत्यानयन बल

$$F = -Kx \quad \dots(i)$$

परन्तु सरल आवर्त गति करते पिण्ड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल

$$F = mA, \text{ जहाँ } A \text{ पिण्ड का त्वरण है} \quad \dots(ii)$$

समी० (i) व (ii) से,

$$mA = -Kx \quad \text{या} \quad A = -\left(\frac{K}{m}\right)x \quad \dots(iii)$$

या $A \propto -x$. चूंकि स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान का त्वरण विस्थापन के समानुपाती है, अतः यह एक सरल आवर्त गति है।

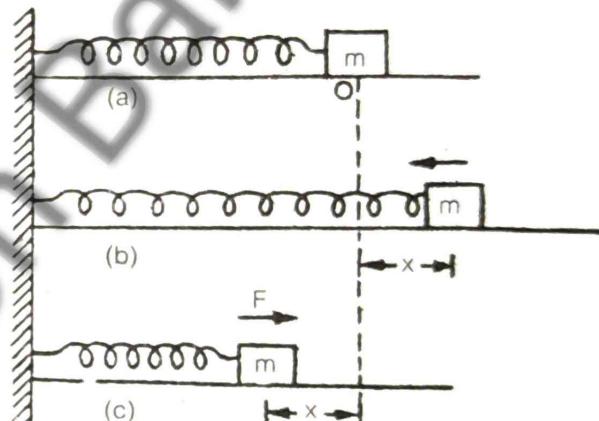
पुनः समीकरण (iii) से,

$$A = -\left(\frac{K}{m}\right)x \quad \text{या} \quad \frac{x}{A} = -\frac{m}{K}$$

अब आवर्तकाल के व्यापक सूत्र से,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}}, -ve \text{ चिह्न छोड़ने पर}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \dots(iv)$$



चित्र 8.13 स्प्रिंग द्रव्यमान प्रणाली का दोलन