प्रतिबल एवं विकृति (Stress and Strain)

प्रश्न 1. बल की परिभाषा बताते हुए इकाइयां भी लिखिए।

उत्तर: बल (Force): कोई भी ऐसी क्रिया जो किसी स्थिर या समान गति से चलती हुई वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करे या फिर परिवर्तन करने का प्रयास करे, बल कहलाती है।

धकेलना (to push), खींचना (to pull) तथा उठाना आदि बलों के कारण ही सम्भव होते हैं। जैसे पृथ्वी का आकर्षण बल प्रत्येक वस्तु को पृथ्वी के केन्द्र की ओर खींचता है, यह बल ही वस्तु का भार कहलाता है। दरवाजे पर खींचने या धकेलने वाला बल लगाकर उसे खोला या बन्द किया जाता है, किसी वस्तु पर पृथ्वी के आकर्षण के विरुद्ध बल लगाकर उसे उठाया जाता है, आदि संक्षेप रूप में कोई भी भौतिक क्रिया बिना बल के सम्भव नहीं।

अत: बल वह साधन भी है जिसके द्वारा कार्य किया जाता है।

बल की इकाइयां (Units of forces)

- मीटरी प्रणाली में बल की इकाई किलोग्राम बल (ksf) है परन्तु साधारणतया इसे किग्रा. ही लिखा जाता है।
- अन्तर्राष्ट्रीय प्रणाली में बल की इकाई 'न्यूटन' होती है। इसे N द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
- CGS प्रणाली में बल की इकाई डाइन होती है।

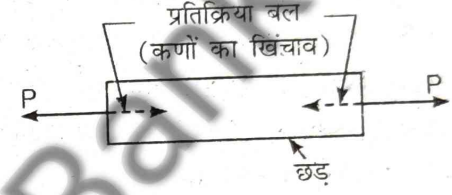
प्रश्न 2. बलों के प्रकारों का वर्णन कीजिये।

उत्तर: बलों के प्रकार (Types of forces)

बल निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं–

1. तनाव बल (Tension forces)
2. संपीडन बल (Compression forces)

1. तनाव बल: चित्र में एक छड़ के सिरों पर दिखाई दिशा में समान मान के बल P लग रहे हैं। यह स्वाभाविक ही है कि इन बलों द्वारा छड़ खींची जा रही है। अर्थात् ये बल छड़ के कणों को एक-दूसरे से और अधिक दूर हटाने का प्रयत्न कर रहे हैं।

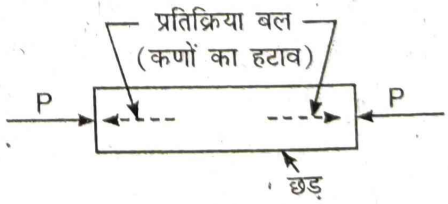


चित्र: तनाव बल

वस्तु पर ऐसे बलों को, जो उसके कणों को परस्पर दूर हटाने का प्रयत्न करते हैं तनन, तनाव या खिंचाव बल (tensile forces) कहते हैं।

परन्तु इन बलों के प्रभाव में, प्रतिक्रिया रूप में वस्तु के कण आपस में एक-दूसरे की ओर खिंचकर क्रिया बलों का विरोध करते हैं। वस्तु के कणों की ऐसी स्थिति तनाव (tension) कहलाती है। तनाव बल वस्तु के बाहर की ओर लगते हैं। जैसे एक डोरी (string) पर सदा तनाव बल ही लग सकता है। अत: डोरी, तार या अन्य इसी प्रकार की वस्तुयें केवल खींच सकती हैं, धकेल नहीं सकतीं।

2. संपीडन बल: चित्र के अनुसार छड़ के सिरों पर बल P एक-दूसरे की ओर लग रहे हैं। उपर्युक्त के विपरीत ये बल छड़ के कणों को दबाते हैं और उन्हें परस्पर समीप लाने का प्रयत्न करते हैं। ऐसे बल संपीडन बल (compressive force) कहलाते हैं।



चित्र: संपीडन बल

ITI Question Bank.com

प्रश्न 3. विभिन्न प्रकार के भारों का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिये।

उत्तरः बोझ या भार के प्रकार

विभिन्न बोझों को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है।

1. अचल तथा चल भार (Dead and live loads)
2. अक्षीय तथा अनुप्रस्थ भार (Axial and transverse loads)
3. तनाव, संपीडन तथा कर्त्तन भार (Tensile, compressive and shear loads)

1. अचल तथा चल भार

(अ) अचल भार (Dead loads): वे सभी बोझ या भार, जो सदैव ही अपना मान बदले बिना क्रिया करते हैं तथा जिनकी क्रिया स्थिति भी निश्चित होती है, अचल भार कहलाते हैं। जैसे किसी ढाँचे के सदस्यों का भार, खम्भों पर केबलों (cables) का भार आदि। सामान्यतया अचल भार ऊर्ध्वाधर क्रिया में कार्य करते हैं।

(ब) चल भार (Live loads): ये बोझ अस्थाई प्रकार से क्रिया करते हैं और इनका मान तथा क्रिया बिन्दु भी स्थिर नहीं रहते। जैसे गाड़ी में चलते-फिरते व्यक्ति, कुर्सी-मेज पर व्यक्ति तथा वस्तुओं के भार, छतों पर बर्फ का भार, क्रेन-मार्गों पर क्रेन का भार, कैंची पर वायु का बल, किसी पुल पर रेलगाड़ी आदि का भार।

2. अक्षीय तथा अनुप्रस्थ भार

अक्षीय भार वे हैं जो किसी अवयव की लम्बाई की अक्ष पर उसकी समान्तर दिशा में क्रिया करते हैं। अक्षीय भार दो प्रकार से लगाये जा सकते हैं–

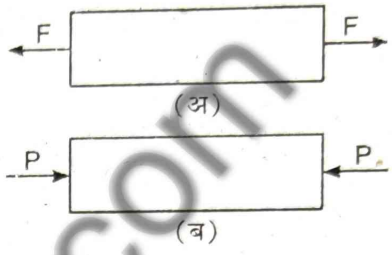
(i) अवयव की लम्बाई की अक्ष से होते हुए, इन्हें केन्द्रीय (central) भार कहते हैं।

(ii) अवयव की लम्बाई की अक्ष के समान्तर, कुछ दूरी पर, इन्हें उत्केन्द्रित (ecentric) भार कहते हैं।

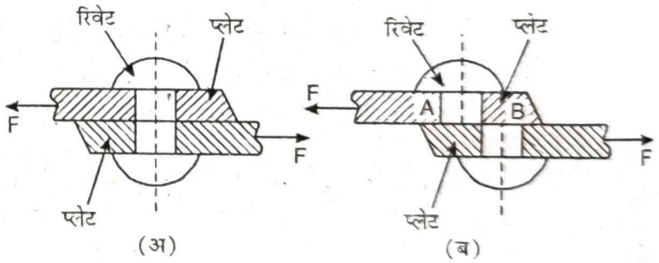
अनुप्रस्थ भार वे हैं जो अवयव की लम्बाई की अक्ष के लम्बरूप अर्थात् उसकी अनुप्रस्थ काट के तल में ही क्रिया करते हैं। अक्षीय भारों को सीधे भार (direct loads) तथा अनुप्रस्थ भारों को कर्तन भार (shear loads) भी कहते हैं।

3. तनाव, संपीडन तथा कर्तन भार

तनाव भार (tensile load) अवयव या वस्तु को खींचता है, जैसे कि चित्र 1 (अ) में भार F। संपीडन भार (compressive load) वस्तु को दबाता है, चित्र 1 (ब) में भार P। तनाव तथा संपीडन के भार सीधे भार (direct loads) भी कहलाते हैं।



कर्तन भार या कर्तन बल (shear loads or shear force): ऊपर बताये गए दोनों भारों की तुलना में भिन्न प्रकार से लगता है। इसे आगे दिये गए उदाहरण से समझा जा सकता है। चित्र 2(अ) में एक रिवेट जोड़ (riveted joint) दिखाया गया है। इसमें दोनों प्लेटों पर खिंचाव बल (तनाव बल) विपरीत दिशाओं में लग रहे हैं। यदि यहबल रिवेट को तोड़ने के लिये काफी है तो रिवेट चित्र 2(ब) के अनुसार टूट जायेगी।



ऊपर वाली प्लेट में रिवेट का भाग बायीं तथा नीचे वाली प्लेट में रिवेट का भाग दायीं ओर खिसक जायेगा। अर्थात् रिवेट, दोनों प्लेटों के बीच समतल AB, पर कटकर फिसल जायेगी। इस क्रिया को रिवेट का कर्तन (shear) कहते हैं। इस आधार पर बल F रिवेट पर कर्तन बल या भार (shear force or load) होता है। जो कि उस समतल में कार्य करता है जिसमें पदार्थ टूटे या उसमें टूटने की प्रवृत्ति पैदा हो। इसके बिपरीत सीधे भार अवयव के अनुप्रस्थ काट (cross-section) के लम्बरूप कार्य करते हैं। कर्तन भार के विषय में अधिक जानकारी अगले अनुच्छेदों में मिल सकती है।

InQuestionBank.com

प्रश्न 4. प्रतिबल को परिभाषित करते हुए प्रकारों का वर्णन कीजिए।

उत्तर: प्रतिबल (stress): किसी बिन्दु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिरोधी बल को प्रतिबल कहते हैं। प्रतिबल को प्रतिबल तीव्रता के नाम से भी जाना जाता है और प्रतिबल को सामान्यतया प्रतिबल तीव्रता द्वारा ही मापा जाता है।

$$\text{प्रतिबल } (p) = \frac{\text{आन्तरिक प्रतिरोधी बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$$

इसकी इकाई न्यूटन/mm^2 होती है।

प्रतिबलों के प्रकार

सामान्यत: बाह्य भारों के कारण उपजे विभिन्न प्रतिबलों को निम्न तीन वर्गों में बांटा जाता है–

1. तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and compressive stress)
2. सीधे तथा नमन प्रतिबल (Direct and bending stress)
3. कर्तन या स्पर्शीय प्रतिबल (Shear or tangential stress)

1. तनाव तथा संपीडन प्रतिबल

(अ) तनाव प्रतिबल (Tensile stress): जब भार या बल खिंचाव में लगता है तो वस्तु में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, तनाव प्रतिबल कहलाता है।

(ब) संपीडन प्रतिबल (Compressive stress): यदि भार या बल F संपीडन में लगता है, अर्थात् वस्तु को दबाता है, तब वस्तु में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, संपीडन प्रतिबल कहलाता है।

2. सीधे तथा नमन प्रतिबल

जब किसी धरन (beam) पर बाहर से अनुप्रस्थ (transverse) भार कार्य करता है तो उसके आकार में परिवर्तन नमन (bending) के रूप में होता है अर्थात् धरन या अंग का झुकाव होता है। इस दशा में विरूपण के विरोध हेतु पदार्थ के अन्दर से उपजे प्रतिबल, नमन प्रतिबल कहलाते हैं।

जब किसी अवयव पर उत्केन्द्रित भार (ecentric load) क्रिया करते हैं तो भी उसका झुकाव होता है, फलस्वरूप उसमें नमन प्रतिबल उपजते हैं। परन्तु इसके साथ-साथ अवयव में तनाव या संपीडन के प्रतिबल भी उपजते हैं जिन्हें सीधे प्रतिबल (direct stresses) कहते हैं।

3. कर्तन या स्पर्शीय प्रतिबल

यदि किसी पिण्ड पर कर्तन भार कार्य करता है तो उसमें उत्पन्न हुए प्रतिबल, कर्तन या स्पर्शीय प्रतिबल कहलाते हैं, यदि बल F रिवेट में कर्तन प्रतिबल उत्पन्न करता है। यदि रिवेट की अनुप्रस्थ काट (cross section) का क्षेत्रफल a है तब रिवेट में उत्पन्न हुई, कर्तन प्रतिबल तीव्रता,

$$\boxed{q = \frac{F}{a}}$$

प्रश्न 5. विकृति को परिभाषित करते हुए प्रकारों का वर्णन कीजिये।

उत्तर: विकृति (Strain): हम जान चुके हैं कि बाह्य बलों के प्रभाव में पिण्ड का विरूपण होता है या उसके आकार में परिवर्तन होता है। इस परिवर्तन की माप को ही विकृति (strain) कहते हैं। इसे निम्न प्रकार मापा जाता है–

$$\text{विकृति, } e = \frac{\text{आकार में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आकार}}$$

क्योंकि विकृति (strain) एक ही प्रकार की दो राशियों का अनुपात है इसलिये इसकी कोई इकाई नहीं होती।

3. विकृति के प्रकार

विकृति तीन प्रकार की होती है।

(अ) लम्बाई में या अनुदैर्ध्य विकृति (longitudinal strain)

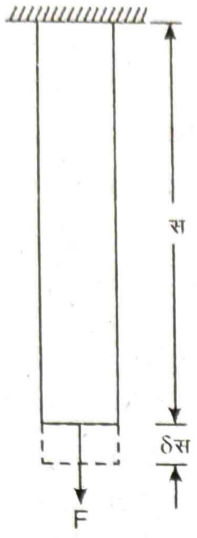
(ब) कर्तन विकृति (shear strain) तथा

(स) आयतन विकृति (volume strain)

(अ) लम्बाई में विकृति (Longitudinal strain): इसे अनुदैर्ध्य विकृति भी कहते हैं। चित्र के अनुसार छड़ की लम्बाई l है और इस पर बल F लगाने से लम्बाई खिंचकर $(l + \delta l)$ हो जाती है अर्थात् δl बढ़ जाती है। इस प्रकार लम्बाई में विकृति,

$$e = \frac{\delta l}{l} = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

ITQuestionBank.com



चित्र: 1

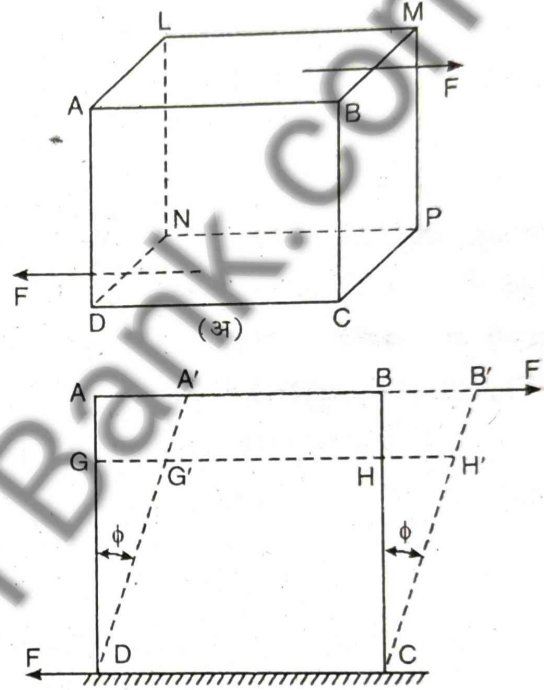
इसके विपरीत यदि बल, वस्तु को दबाता है तब इसकी लम्बाई घटेगी। यदि लम्बाई l से घटकर $(l-\delta l)$ हो जाती है तब लम्बाई में परिवर्तन,

$$= l-(l-\delta l) = \delta l$$

इसलिये लम्बाई में विकृति, $e = \dfrac{\delta l}{l}$

अत: यह विकृति, प्रति इकाई लम्बाई में परिवर्तन होती है। यदि बल खिंचाव या तनाव में लगता है तो विकृति को तनाव विकृति (tensile strain) कहते हैं, जिसमें लम्बाई बढ़ जाती है। इसके विपरीत संपीडन बल के कारण लम्बाई घट जायेगी और विकृति को संपीडन विकृति (compressive strain) कहेंगे। क्योंकि तनाव तथा संपीडन के बल सीधे बल कहलाते हैं, अत: इनके कारण हुई विकृति (strain) को भी सीधी विकृति (direct strain) कहते हैं। उपर्युक्त विवरण से हम देखते हैं कि यह विकृति लम्बाई में परिवर्तन तथा प्रारम्भिक लम्बाई का अनुपात है, इसलिये इसकी कोई इकाई नहीं होती।

(ब) कर्तन या कोणीय बिकृति (Shear or angular strain): चित्र 2 (अ) के अनुसार एक घन (cube) ABCD मानिये, जिसकी भुजा की लम्बाई l है। इसका नीचे का तल CD बद्ध (fixed) है और ऊपरी तल AB में एक बल F कार्य करता है। सन्तुलन के लिये बद्ध तल CD पर भी F मान का एक बल, ऊपरी तल में बल के विपरीत दिशा में कार्य करेगा। अब चित्र 2 (ब) के अनुसार निचला तल CD बद्ध होने के कारण अपने ही स्थान पर स्थिर रहेगा परन्तु शेष सारा घन A′B′CD के आकार का हो जायेगा। क्योंकि बल F, AB के तल में ही कार्य करता है, इसलिये यह कर्तन बल (shear force) है और घन में कर्तन प्रतिबल तथा कर्तन विकृति (shear strain) उत्पन्न करता है। इस प्रकार,



चित्र: 2

कर्तन प्रतिबल तीव्रता,

$$q = \frac{F}{\text{तल } ABML \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{F}{l \times l}$$

फिर कर्तन विकृति, $e_s = \dfrac{BB'}{BC} = \dfrac{AA'}{AD}$

यदि $\angle BCB' = \phi = \angle ADA'$

तब $\dfrac{BB'}{BC} = \tan\phi = \dfrac{AA'}{AD}$

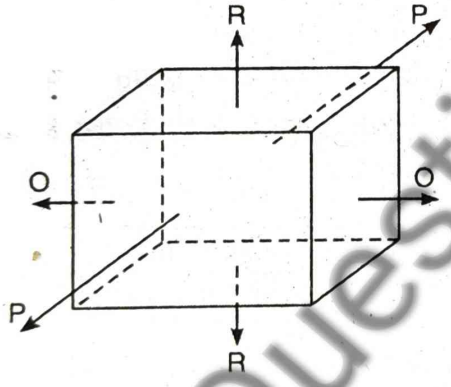
इसलिये, $e_s = \tan\phi$

अधिकतर दशाओं में कोण ϕ बहुत छोटा होता है, इसलिये $\tan\phi = \phi$ रेडियन (लगभग)। अत: कर्तन विकृति,

IITQuestionBank.com

$$\boxed{e_s = \phi}$$

कर्तन में प्रत्येक समतल अपने साथ वाले समतल पर फिसलता है। चित्र 2(ब) में घन ABCD को दो भागों ABHG तथा HGDC में बाँटिये। बल F के प्रभाव में ऊपर वाला भाग निचले की अपेक्षा दायीं ओर खिसक जाता है। इस प्रकार ABHG की नई स्थिति A′ B′ H′ G′ हो जाती है। ऐसा इसलिए होता है कि ऊपर वाले भाग का बल F दायीं ओर खींचता है परन्तु नीचे वाले भाग HGDC को बल F की प्रतिक्रिया (reaction) बायीं ओर खींचे रहती है। अर्थात् हम कह सकते हैं कि ऊपर वाला भाग ABHG नीचे वाले HGDC की अपेक्षा कुछ दायीं ओर खिसक जाता है। इसी तरह ABCD में अनेक क्षैतिज पटिट्याँ मानने पर हम देखते हैं कि प्रत्येक ऊपर वाली पट्टी अपने साथ लगी निचली पट्टी की अपेक्षा कुछ दायीं ओर खिसकती है तथा पटिट्यों में यह फिसलन नीचे की ओर घटती जाती है और अन्त में सबसे नीचे वाली पट्टी CD बद्ध (fixed) होने के कारण अपने स्थान पर ही रहती है। इस प्रकार ABCD के सारे पदार्थ में कर्तन (shesr) होता है।



चित्र 3

(स) आयतन विकृति (Volume strain): चित्र 3 के अनुसार यदि किसी आयताकार ठोस टुकड़े के सभी तलों या कुछ तलों पर बल लगाये जायें तो उसके आयतन में कुछ परिवर्तन होगा। यदि यह परिवर्तन δV है और प्रारम्भिक आयतन V है, तब

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}} \text{ या } \boxed{e_s = \frac{\delta V}{V}}$$

प्रश्न 6. प्रत्यास्थता सीमा को परिभाषित करते हुए समझाइये।

उत्तर: प्रत्यास्थता सीमा (Elastic Limit): हम जानते हैं कि प्रत्यास्थता (elasticity) पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु को विकृत (deform) करने वाले बलों को हटा लेने पर वस्तु अपने पहले आकार को धारण कर लेती है। अब यदि बल के मान को बढ़ाते जायें तो वस्तु की विकृति तथा उसके कारण उपजे प्रतिबल भी बढ़ते जाते हैं परन्तु प्रत्यास्थ ही रहती है। वस्तु पर बल अर्थात् प्रतिबल बढ़ाते जाने पर एक अवस्था ऐसी भी आती है जब वस्तु प्रत्यास्थ नहीं रहती और प्रतिबल हटा लेने पर वस्तु पूर्व आकार धारण नहीं करती। इस प्रकार प्रतिबल के बढ़ते क्रम में उसका ऐसा मान भी होता है जिसके लिये वस्तु प्रत्यास्थता की अन्तिम सीमा पर पहुँच जाती है और प्रतिबल के इस मान को जरा सा भी बढ़ाने पर वस्तु प्रत्यास्थता का गुण नहीं दिखाती और प्रतिबल हटा लेने पर वस्तु पूर्व आकार धारण नहीं करती। प्रतिबल तीव्रता का वह अन्तिम या अधिकतम मान, जिस पर वस्तु प्रत्यास्थ रहती है, प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) कहलाता है।

प्रत्यास्थता सीमा से अधिक मान का बल या प्रतिबन्ध लगाकर उसे हटा लेने पर वस्तु अपना पूर्व आकार धारण नहीं करती और उसमें कुछ न कुछ विरूपण (deformation) अवश्य शेष रह जाता है जिसे स्थायी विकृति (Permanent set) कहते हैं। जब वस्तु पर बल या भार उसकी प्रत्यास्थता सीमा से अधिक लगाया जाता है तो इस दशा में भार लगाने को प्रत्यास्थता सीमा से पार भार लगाना (loading beyond elastic limit) कहते हैं। इसके विपरीत प्रत्यास्थता सीमा पर पहुँचने से पहले वस्तु प्रत्यास्थ (elastic) रहती है और बल हटा लेने पर अपना पूर्व आकार धारण कर लेती है अर्थात् एक स्प्रिंग के समान व्यवहार करती है।

प्रत्येक पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) का मान भिन्न होता है। साधारणतया प्रत्यास्थता सीमा को समानुपाती (limit of proportionality) सीमा कहते हैं। समानुपाती सीमा का तात्पर्य प्रतिबल एवं विकृति में समानुपात की सीमा से है अर्थात् इस सीमा के पश्चात्

ITQuestionBank.com

प्रतिबल एवं विकृति का समानुपाती सम्बन्ध समाप्त हो जाता है।

प्रश्न 7. हुक का नियम समझाते हुए प्रत्यास्थता गुणांक के प्रकारों का वर्णन कीजिये।

उत्तरः हुक का नियम (Hook's Law): इस नियम के अनुसार, प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) के अंदर प्रतिबल तीव्रता, उससे सम्बन्धित विकृति (strain) के समानुपाती (proportional) होती है। अर्थात्

प्रतिबल तीव्रता $\propto$ विकृति

या प्रतिबल तीव्रता = स्थिरांक × विकृति

या $\dfrac{\text{प्रतिबल तीव्रता}}{\text{विकृति}}$ = स्थिरांक

इस स्थिरांक को हुक स्थिरांक (Hook's Constant) या प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity) कहते हैं। किसी पदार्थ के लिये अमुक तीव्रता तथा सम्बन्धित विकृति के आधार पर हुक स्थिरांक (elastic constant) निम्न प्रकार हैं:

1. तनाव या संपीडन में प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक

(Modulus of Elasticity in tension or compression or Young's Modulus)

2. कर्तन मापांक

(Modulus of Rigidity)

3. आयतन मापांक

(Bulk Modulus)

1. यंग मापांक (Young's Modulus): प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) के अन्दर सीधा प्रतिबल (direct stress) या प्रतिबल तीव्रता, उससे सम्बन्धित विकृति के समानुपाती होता है। इस प्रकार प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर सीधे प्रतिबल एवं उपजी विकृति के अनुपात को प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक कहते हैं।

यंग मापांक, $E = \dfrac{\text{सीधा प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता}}{\text{लम्बाई में विकृति}} = \dfrac{\textit{direct stress}}{\textit{longitudinal strian}}$

या $\boxed{E = \dfrac{P}{e}}$

क्योंकि विकृति e की कोई इकाई नहीं होती इसलिये E की वही इकाई है जो प्रतिबल p की होती है। अर्थात् न्यूटन/मिमी^{2}, अथवा किग्रा/(सेमी)^2 अथवा टन/(सेमी)^2, आदि।

2. कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity): प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर कर्तन प्रतिबल (shear stress) या प्रतिबल तीव्रता एवं उससे सम्बन्धित कर्तन विकृति (shear strain) के अनुपात को कर्तन मापांक (modulus of rigidity) कहते हैं तथा G या C से प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार

$G = \dfrac{\text{कर्तन प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता}}{\text{कर्तन विकृति}} = \dfrac{\text{intensity of shear stress}}{\text{shear strain}}$

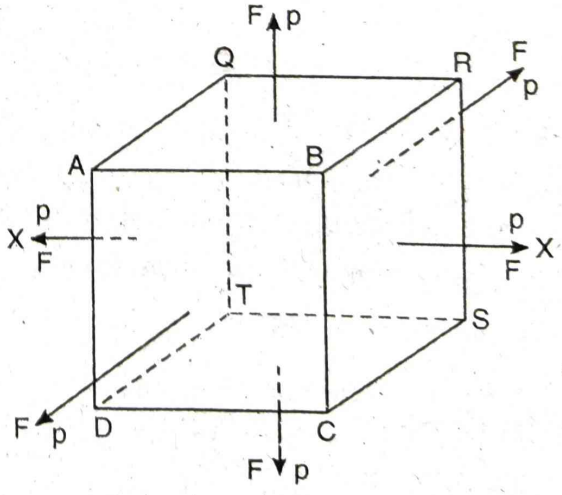
या $\boxed{E = \dfrac{q}{\phi}}$

यंग मापांक की तरह कर्तन की इकाई भी न्यूटन/मिमी^{2} अथवा किग्रा/(सेमी)^2 अथवा टन/(सेमी)^2 आदि होती है।

3. आयतन मापांक (Bulk Modulus): प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर तीनों परस्पर लम्ब दिशाओं में समान मान तथा प्रकृति के सीधे प्रतिबल (चित्र के अनुसार एक घन oS lHh iQydksa ij leku ifrcy p) या प्रतिबल तीव्रता एवं उससे सम्बन्धित आयतन त्रिकृति e_v के अनुपात को आयतन मापांक कहते हैं तथा K द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$$\boxed{K = \dfrac{\text{सीधा प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = \dfrac{q}{e_v}}$$

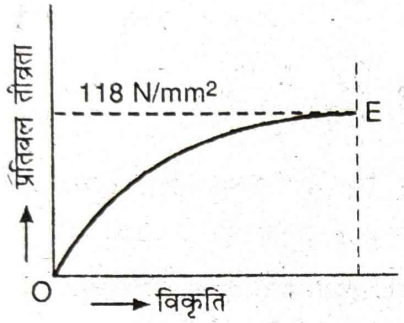
ITI Question Bank.com



प्रश्न 8. भंगुर पदार्थ (ढलवां लोहा) के लिए प्रतिबल विकृति वक्र खींचिये।

उत्तर: ढलवाँ लोहा (cast iron) के लिये प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-strain curve): ढलवाँ लोहा एक भंगुर (brittle) पदार्थ है अर्थात् कम लम्बाई बढ़ने पर ही या कम तनाव प्रतिबल पर ही टूट जाता है। इसका तनाव में प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र में दिखाया गया है।

इसकी प्रत्यास्थता सीमा बहुत कम है, अर्थात् लगभग शून्य होती है। इसमें पराभव बिन्दु (yield point) अनुपस्थित है।

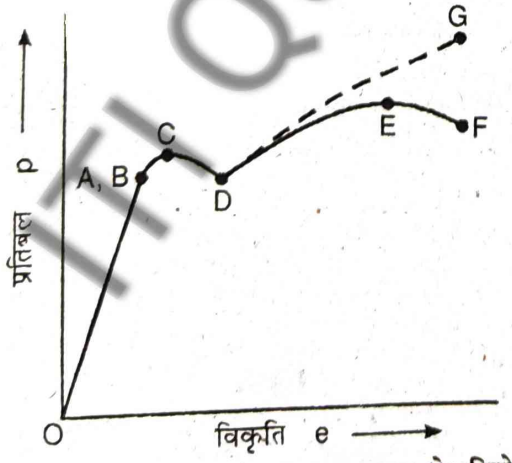


प्रतिबल-विकृति वक्र
(ढलवाँ लोहे के लिये)

ढलवाँ लोहे का अन्तिम प्रतिबल (Ultimate stress) तनाव में 7.02 से 210 kN/mm^2 तक होता है, इस समय विकृति लगभग $\frac{1}{400}$ होती है। अधिक प्रतिबल पर खिंचाव की दर भी अधिक होती है। खिंचाव में इसका प्रत्यास्थता गुणांक भी प्रतिबल तीव्रता के साथ बदलता है। इसका यंग मापांक 162 kN/mm^2 तक होता है।

प्रश्न 9. तन्य पदार्थों के लिए प्रतिबल विकृति वक्र बनाइये।

उत्तर:



प्रतिबल-विकृति वक्र (नरम इस्पात के लिये)

जहाँ A = समानुपाती सीमा
B = प्रत्यास्थता सीमा
C = ऊपरी पराभव बिन्दु
D = निचला पराभव बिन्दु
G = अकलित प्रतिबल
E = चरम प्रतिबल
F = भंजक प्रतिबल या अंतिम प्रतिबल

प्रश्न 10. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें–

(*i*) सुरक्षा गुणांक (Factor of safety)

(*ii*) कार्यकारी प्रतिबल (Working or safe stress)

(*iii*) अन्तिम प्रतिबल (Ultimate stress)

उत्तर: (*i*) सुरक्षा गुणांक: अन्तिम प्रतिबल तथा कार्यकारी प्रतिबल के अनुपात को सुरक्षा गुणांक कहते हैं। इसे बहुधा S से प्रदर्शित करते हैं।

इसलिए

$$\text{सुरक्षा गुणांक } S = \frac{\text{अन्तिम प्रतिबल}}{\text{कार्यकारी प्रतिबल}}$$

सुरक्षा गुणांक का मान, प्रतिबल के लगने के ढंग तथा कार्य करने की दशाओं पर निर्भर करता है।

(*ii*) कार्यकारी प्रतिबल: कार्य करते समय किसी पदार्थ पर जितना अधिकतम प्रतिबल मान्य होता है, उसे कार्यकारी प्रतिबल कहते हैं और इस समय भार को सुरक्षात्मक भार कहते हैं।

(*iii*) अन्तिम प्रतिबल: जिस भार पर पदार्थ टूटता है उसे अन्तिम भार तथा इस समय के प्रतिबल को 'अन्तिम प्रतिबल' या 'तन्यता' कहते हैं। अन्तिम प्रतिबल का मान भंजन के समय बल को पदार्थ के भंजक बिन्दु पर प्रारम्भिक अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल से भाग करके प्राप्त किया जाता है।

प्रश्न 11. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए–

(*i*) प्रत्यास्थता मापांक (Modulas of Elasticiy)

(*ii*) कर्तन मापांक (Shear Modulas or Modulus of Rigidity)

ITI Question Bank.com

(*iii*) **आयतन मापांक (Bulk Modulas)**

उत्तर: प्रत्यास्थता मापांक: प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर सीधा प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता, उससे सम्बन्धित विकृति के समानुपाती होता है। इस प्रकार प्रत्यास्थता सीमा के अंदर सीधे प्रतिबल एवं उपजी विकृति के अनुपात को प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक कहते हैं। इसकी इकाई N/mm^2 होती है।

$$\text{प्रत्यास्थता मापांक (E)} = \frac{\text{कर्तन प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता}}{\text{कर्तन विकृति}}$$

(*ii*) **कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity):** प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर कर्तन प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता एवं उससे सम्बन्धित कर्तन विकृति के अनुपात को कर्तन मापांक कहते हैं तथा G या C से प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार

$$G = \frac{\text{कर्तन प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता}}{\text{कर्तन विकृति}}$$

$$\boxed{G = \frac{V}{\varphi}}$$

इसकी इकाई N/mm^2 होती है।

आयतन मापांक (Bulk Modulus): प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर तीनों लम्ब दिशाओं में समान मान तथा प्रकृति के सीधे प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता एवं उससे सम्बन्धित आयतन विकृति (e_v) के अनुपात को आयतन मापांक कहते हैं तथा K द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$$\boxed{K = \frac{\text{सीधा प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}}$$

प्रश्न 12. पार्श्व विकृति को परिभाषित करते हुए पायजन अनुपात बताइये।

उत्तर: पार्श्व विकृति (lateral strain): हम जानते हैं कि अक्षीय बल से यदि किसी वस्तु की अनुदैर्घ्य विकृति लम्बाई घटने की है तो इसके लम्बरूप माप में विकृति माप बढ़ने वाली होगी। इस तरह बल की दिशा के लम्बरूप माप में विकृति को पार्श्व विकृति कहते हैं।

यदि तार का व्यास d है और इस पर अक्षीय तनाव बल लगाने से व्यास में कमी Dd की जाती है।

$$\boxed{\text{पार्श्व विकृति} = \frac{Dd}{d}}$$

पायजन अनुपात (Paisson's Ratio): पार्श्व विकृति एवं लम्बाई में विकृति के अनुपात को पायजन अनुपात कहते हैं।

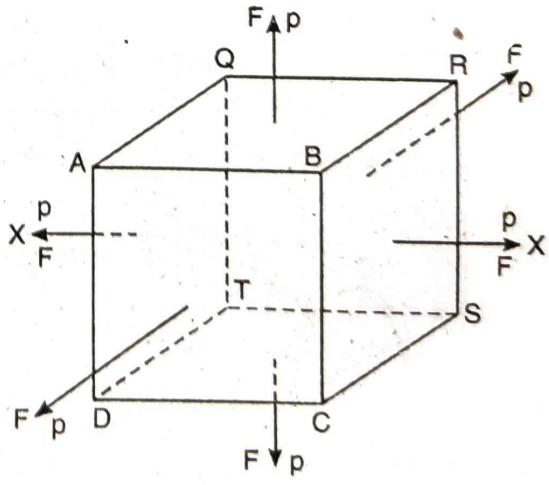
$$\text{पायजन अनुपात} = \frac{\text{पार्श्व विकृति}}{\text{लम्बाई में विकृति}} = \frac{1}{m} = \text{स्थिरांक}$$

यह स्थिरांक वस्तु के पदार्थ पर निर्भर करता है और प्रत्येक पदार्थ के लिए इसका मान भिन्न होता है।

अधिकतर धातुओं के लिए $\frac{1}{m}$ का मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच में होता है। कभी-कभी केवल m को पायजन स्थिरांक भी कहा जाता है।

प्रश्न 13. प्रत्यास्थता मापांक (E) और आयतन मापांक (K) में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर: E तथा K में सम्बन्ध: चित्र 1 के अनुसार किसी पदार्थ का घन (cube) ABCDQRST है। इस घन के सभी फलकों (faces) पर F मान के तनाव बल (tensile forces) कार्य करते हैं जिनके कारण घन में p मान के सीधे प्रतिबल उत्पन्न हो जाते हैं। माना कि घन के पदार्थ का यंग मापांक E आयतन गुणांक K तथा पायजन अनुपात $\frac{1}{m}$ है।



चित्र: 1

Question Bank.com

माना घन की भुजा l है।

अब X – X दिशा में सीधा प्रतिबल (तनाव में) p है, इसलिए इस दिशा में सीधे प्रतिबल p के कारण तनाव विकृति

$$= \frac{p}{E}$$

फिर शेष दो दिशाओं में सीधे प्रतिबलों के कारण X – X दिशा में पार्श्व विकृति (सम्पीडन में),

$$= \frac{p}{mE} + \frac{p}{mE} = \frac{2p}{mE}$$

इस प्रकार X – X दिशा में कुल तनाव विकृति

$$e = \frac{\delta l}{l} = \frac{p}{E} - \frac{2p}{mE} = \frac{p}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

क्योंकि तीनों दिशाओं में प्रतिबल समान तथा तनाव के हैं और एक घन पर लग रहे हैं, इसलिये तीनों दिशाओं में तनाव विकृतियाँ बराबर होंगी।

घन का आरम्भ में आयतन

$$V = t^3$$

अवकलन (differentiation) करने पर

$$\delta V = 3l^2 \delta l$$

V से दोनों ओर भाग देने पर

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3l^2 \delta l}{t^3} = 3\frac{\delta l}{l} = 3e$$

$$\therefore \text{ आयतन विकृति } = \frac{\delta V}{V} = 3\frac{p}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

परंतु हम जानते हैं कि,

$$K = \frac{\text{सीधा प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = \frac{p}{\delta V / V}$$

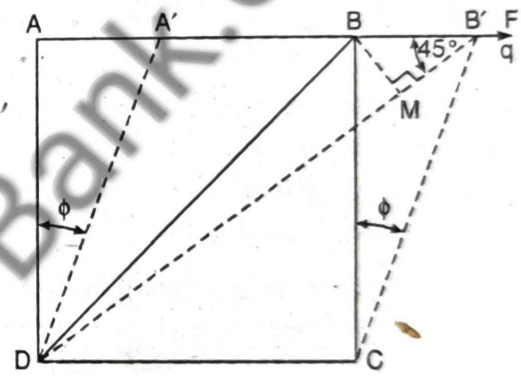
$$\therefore \quad \frac{\delta V}{V} = \frac{p}{K} = 3\frac{p}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

अत: $$E = 3K\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

प्रश्न 14. प्रत्यास्थता मापांक (E) तथा दृढ़ता मापांक (G) में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

उत्तर: E तथा G में सम्बन्ध: चित्र 2 में दिखाये गये पर फिर विचार कीजिये। अब सुविधा के लिये हम घन के केवल सामने वाले ही फलक पर विचार करेंगे।

घन के निचले फलक CDTS को स्थिर मान कर ऊपर वाले फलक ABRQ पर दायीं ओर एक कर्तन बल (shear force) F लगाइये। इस बल के कारण माना कि कर्तन प्रतिबल (shear stress) q पैदा होता है और चित्र 2(अ) के अनुसार ABCD का नया, आकार A′ B′ CD हो जाता है अर्थात् ABCD में ϕ कर्तन विकृति उत्पन्न हो जाती है। इस प्रकार घन ABCD का विकर्ण (diagonal) AC छोटा तथा विकर्ण BD बड़ा हो जायेगा।



चित्र: 2 (अ)

अब B से B′ D पर, BM लम्ब डालिए।

DM को DB के बराबर मानकर,

विकर्ण BD में रैखिक विकृति, $e = \frac{B'D - BD}{BD} = \frac{B'M}{BD}$

अब $\frac{B'M}{B'D} = \cos 45$ लगभग (क्योंकि ϕ बहुत छोटा है)

या $$B'M = B'B\cos 45 = \frac{B'B}{\sqrt{2}}$$

फिर Δ BCD में

$$\frac{BC}{BD} = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$BD = \sqrt{2}.BC$$

ITI Question Bank.com

∴ विकर्ण BD में रैखिक विकृति (linear strain)

$$e = \frac{B'M}{BD} = \frac{B'B}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}.BC} = \frac{1}{2}\frac{B'B}{BC}$$

या $$e = \frac{1}{2}.\phi.$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि रैखिक विकृति (linear strain) e, कर्तन विकृति (shear strain) ϕ की आधी होती है।

कर्ण BD में यह रैखिक विकृति e, तनाव में होती है। इसी प्रकार विकर्ण AC में भी विकृति कर्तन ϕ की आधी होगी परन्तु यह सम्पीडन में होगी।

अब हम AB पर कर्तन प्रतिबल q के ही प्रभाव विकर्ण एक दूसरे ढंग से निम्न प्रकार निकालते हैं-

सर्वप्रथम निम्न प्रमुख नियम को याद रखिये-

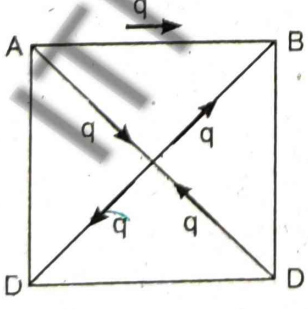
चित्र 2(ब) के अनुसार जब किसी घन ABCD के तल AB पर दिखायी दिशा में q मान का कर्तन प्रतिबल कार्य करता है तो घन के विकर्ण BD से होते हुये तल में q मान का तनाव प्रतिबल तथा विकर्ण, AC से होते हुए तल में q मान का ही सम्पीडन प्रतिबल उपजता है।

अब उपरोक्त आधार पर q तनाव प्रतिबल के कारण विकर्ण BD में सीधी तनाव विकृति

$$= \frac{q}{E}$$

फिर AC में q सम्पीडन प्रतिबल के कारण विकर्ण BD में पार्श्व तनाव विकृति

$$= \frac{q}{mE}$$



चित्र: 2 (ब)

अतः विकर्ण BD में कुल तनाव विकृति

$$e = \frac{q}{E} + \frac{q}{mE} = \frac{q}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

∴ सम्बन्ध (2) से $$\frac{\phi}{2} = \frac{q}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

या $$\frac{q}{2G} = \frac{q}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$ [क्योंकि $G = \frac{q}{\phi} \therefore \phi = \frac{q}{G}$]

$$E = 2G\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

प्रश्न 15. एक 70 मिमी व्यास एवं 3 मीटर लम्बी छड़ पर 100 कि न्यूटन का भार लगा है। छड़ की धातु के लिये प्रतिबल, विकृति एवं यंग मापांक निकालिये जबकि छड़ में एक सेमी लम्बाई बढ़ी हो।

उत्तर: छड़ का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi}{4} \times d^2 = \frac{\pi}{4} \times 70^2 = 3848.45 \text{ मिमी}^2$$

अतः प्रतिबल, $$p = \frac{F}{A} = \frac{100 \times 1000}{3848.45} = 25.98 \text{ न्यूटन/मिमी}^2$$

विकृति, $$e = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{10}{3 \times 1000} = 0.00333$$

यंग मापांक, $$E = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \frac{p}{e} = \frac{25.98}{0.00333} = 7801.8 \text{ न्यूटन/मिमी}^2$$

प्रश्न 16. इस्पात (steel) की बनी एक छड़ की लम्बाई 3 m है तथा उसकी अनुप्रस्थ काट (cross-ssection) 3 m × 2 cm है, इस पर 30 kN का अक्षीय तनाव बल (axial tensile force) लग रहा है। छड़ में उत्पन्न हुई प्रतिबल (stress) तीव्रता, विकृति (strain) तथा उसकी लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये, यदि इस्पात के लिये यंग मापांक का मान $E = 2 \times 10^5$ N/mm² है।

उत्तर: छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

$$A = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}^2 = 600 \text{ mm}^2$$

ITI Question Bank.com

तनाव बल, F = 30 kN = 30,000 N

अत: छड़ में उपजी प्रतिबल तीव्रता,

$$p = \frac{F}{A} = \frac{30,000}{600} = 50 N/mm^2$$

$\therefore$ विकृति (strain), $e = \frac{p}{E} = \frac{50}{2 \times 10^5} = 250 \times 10^{-6}$

$\therefore$ लम्बाई में परिवर्तन (वृद्धि) $\delta l = e \times l = 250 \times 10^{-6} \times 3$ m = 0.75 mm

प्रश्न 17. एक मीटर लंबी किसी छड़ का व्यास ज्ञात कीजिये यदि 15 kN तनाव बल से उसकी लम्बाई में 0.6 mm की वृद्धि हो जाती है। छड़ के पदार्थ का यंग मापांक $E = 1.8 \times 10^5$ N/mm² है।

उत्तर: छड़ की लम्बाई l = 1000 mm, लम्बाई में परिवर्तन δl = 0.6 mm

माना कि छड़ का व्यास d mm है।

तब छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times d^2\ mm^2$

छड़ पर तनाव बल, F = 15 kN = 15000 N

छड़ में प्रतिबल, $p = \frac{15000}{(\pi/4) \times d^2} = \frac{15000 \times 4}{\pi d^2} N/mm^2$

छड़ में विकृति (strain), $e = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{\delta l}{l} = \frac{0.6}{1000} = 0.0006$

$E = \frac{p}{e}$ से, $E = 1.8 \times 10^5 = \frac{15000}{\pi \times d^2} \times \frac{1}{0.0006}$

d = 13.3 mm

प्रश्न 18. चित्र के अनुसार एक बोल्ट द्वारा दो प्लेटें आपस में जोड़ी गई हैं। दोनों प्लेटें विपरीत दिशाओं में 20,000 N के बल से खिंच रही हैं। यदि बोल्ट का व्यास 10 mm हो और इसके पदार्थ का कर्तन मापांक (modulus of rigidity) G = 40,000 N/mm² हो, तो बोल्ट में कर्तन प्रतिबल (shear stress) तथा कर्तन विकृति (shear strain) ज्ञात कीजिये।

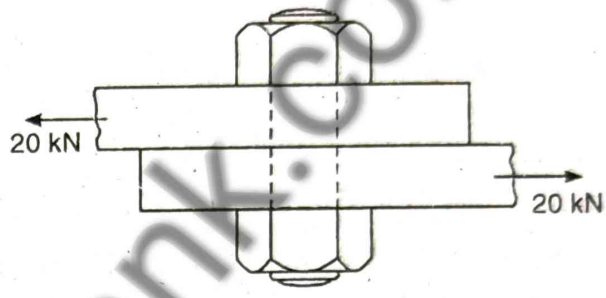
उत्तर: बल, F = 20,000 N, बोल्ट का व्यास, d = 10 mm, G = 40,000 N/mm²

बोल्ट में कर्तन प्रतिबल तीव्रता, $q = \frac{F}{A}$

A = बोल्ट की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi}{4} \times 10^2 = 25\pi\ mm^2$

$q = \frac{20,000}{25\pi} = 254.65\ N/mm^2$



यदि बोल्ट में कर्तन विकृति = ϕ तब $G = \frac{q}{\phi}$ या $\phi = \frac{q}{G}$

$\therefore$ बोल्ट में कर्तन विकृति = $\phi = \frac{254.65}{40000} = 0.006366$

प्रश्न 19. 10 mm व्यास के मृदु-इस्पात की एक छड़ पर 30 kN का अक्षीय तनन भार लगाया गया। यदि छड़ पदार्थ के लिये पाइज़न अनुपात 0.25 है, तो ज्ञात कीजिये-

(अ) छड़ में उत्पन्न अनुदैर्ध्य विकृति

(ब) छड़ के व्यास में कमी

उत्तर: माना कि मृदु-इस्पात के लिये यंग मापांक, $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

छड़ का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times 10^2\ mm^2$

$= 25\pi$ mm²

अब छड़ में उत्पन्न प्रतिबल, $p = \frac{P}{A} = \frac{30}{25\pi} = 0.38197 kN/mm^2$

$= 381.97$ N/mm²

ITI Question Bank.com

(अ) छड़ में उत्पन्न अनुदैर्ध्य विकृति, $e = \frac{P}{E}$

$$= \frac{381.97}{2\times10^5} = 1.909\times10^{-3}$$

(ब) यदि छड़ के व्यास d में कमी δd होती है तो,

छड़ में उपजी पार्श्व विकृति $= \frac{\delta d}{d} = e\times\frac{1}{m}$

अतः छड़ के व्यास में कमी, $\delta d = e\times\frac{1}{m}\times d$

$$= 1.909\times10^{-3}\times0.25\times10$$
$$= 4.7725\times10^{-3}\text{ mm}$$

प्रश्न 20. धातु के एक बेलन की लम्बाई 60 cm तथा व्यास 30 cm है। इसे लम्बाई में 200 kN के बल द्वारा दबाया जाता है। यदि बेलन की लम्बाई में 0.03 mm की कमी और आयतन में 10^3 mm की कमी हुई हो तो धातु के लिये पाइज़न अनुपात तथा E के मान ज्ञात कीजिये। बेलन के व्यास में वृद्धि की भी गणना कीजिये।

उत्तर: $l = 600$ mm, d = 300, F = 200 kN = 2×10^5 N. $\delta l = 0.03$ mm, $\delta V = 10^3$ mm^3

बेलन की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}\times d^2 = \frac{\pi}{4}\times300^2$

$$= 7.068\times10^4\text{ mm}^2$$

अब बेलन की लम्बाई में विकृति, $e = \frac{\delta l}{l}$

$$\therefore \quad e = \frac{0.63}{600} = 5\times10^{-5}$$

बेलन में प्रतिबल तीव्रता, $p = \frac{F}{A} = \frac{2\times10^5}{7.068\times10^4} = 2.83\ N/mm^2$

हम जानते हैं कि, $E = \frac{p}{e} = \frac{2.83}{5\times10^{-5}} = 56.6\ N/mm^2$

बेलन का आरम्भ में आयतन $V = \frac{\pi}{4}\times300^2\times600$

$$= 4.2408\times10^7\text{ mm}^3$$

बेलन में आयतन विकृति, $= \frac{\delta d}{V} = e\left(1-\frac{2}{m}\right)$

बेलन के आयतन में कमी, $\delta V = e\times V\left(1-\frac{2}{m}\right)$

$$\therefore \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\delta V}{e\times V}\right)$$

$$\therefore \text{ पाइज़न अनुपात, } \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{10^3}{5\times10^{-5}\times4.2408\times10^7}\right)$$

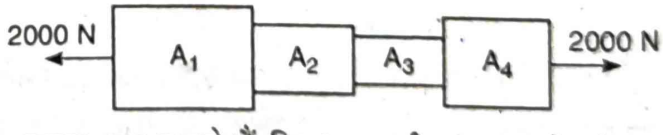
$$= \frac{1}{2}(1-0.472) = 0.264$$

हम जानते हैं कि पार्श्व विकृति, $\frac{\delta d}{d} = \frac{e}{m}$

$$\therefore \text{ व्यास में कमी } Dd = \frac{e}{m}\times d = 5\times10^{-5}\times0.264\times300$$
$$= 3.96\times10^{-3}\text{ mm}$$

प्रश्न 21. चित्र में दिखाये गये एक वृत्ताकार स्टैण्ड शाफ्ट की कुल लम्बाई 2 m है। इसकी लम्बाई में कुल वृद्धि ज्ञात कीजिये। विभिन्न काटों A_1, A_2, A_3 और A_4 के क्षेत्रफल क्रमशः 400 mm^2, 200 mm^2, 100 mm^2, और 200 mm^2 हैं तथा चारों काटों की प्रारम्भिक लम्बाइयाँ बराबर हैं।

E = 2×10^5 N/mm^2 लीजिए। **(U.P)**



उत्तर: हम जानते हैं कि l लम्बाई, A काट के क्षेत्रफल तथा E प्रत्यास्थता गुणांक वाली छड़ पर F बल से लम्बाई में वृद्धि,

$$\delta l = l\times e = l\times\frac{p}{E} = \frac{l\times F}{A}\times\frac{1}{E} = \frac{lF}{AE} \quad ...(1)$$

इस प्रकार यदि काट वाले कई भाग आपस में जुड़े हों और उन पर समान बल कार्य करता हो तो छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि

ITI Question Bank.com

δl = सभी भागों की लम्बाइयों में अलग-अलग वृद्धि का योग

$$= \delta l_1 + \delta l_2 + \delta l_3 + ...$$

$$\therefore \quad \delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} + ...\right] \quad ...(2)$$

(यहाँ यह माना गया है कि सभी भागों के पदार्थ के लिये E समान है)

यहाँ पर,

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = \frac{2000}{4} = 500\ mm = l'$$

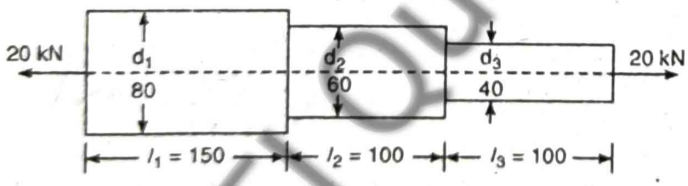
∴ शाफ्ट की लम्बाई में कुल वृद्धि [सम्बन्ध (2) से]

$$\delta l = \frac{F}{E} \times l'\left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4}\right]$$

$$= \frac{2000}{2\times10^5} \times 500\left[\frac{1}{400} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right]$$

$$\delta l = 9.1125\ \text{mm}$$

प्रश्न 22. नरम इस्पात (mud steel) की बनी एक शाफ्ट चित्र 8.29 में दिखाई गई है। यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm² हो और शाफ्ट पर 20 kN का बल दोनों सिरों पर लग रहा हो जो उसकी लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।



उत्तर: शाफ्ट के पहले भाग की काट का क्षेत्रफल,

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \times 80^2 = 5024\ mm^2$$

शाफ्ट के दूसरे भाग की काट का क्षेत्रफल,

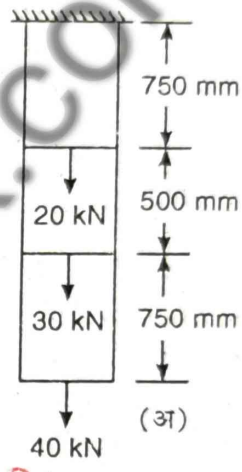
$$A_2 = \frac{\pi}{4} \times 60^2 = 2826\ mm^2$$

शाफ्ट के तीसरे भाग की काट का क्षेत्रफल,

$$A_3 = \frac{\pi}{4} \times 40^2 = 1256\ mm^2$$

$$F = 20\ \text{kN}$$

अब सूत्र $\delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3}\right]$ के अनुसार शाफ्ट की लम्बाई में कुल परिवर्तन,



$$\delta l = \frac{20\times10^3}{2\times10^5}\left[\frac{150}{5024} + \frac{100}{2826} + \frac{100}{1256}\right]$$

$$= 10^{-1}\,[0.0299 + 0.0354 + 0.0796]$$

$$= 0.01449\ \text{mm}$$

प्रश्न 23. चित्र (अ) में दिखाई गई इस्पात की बनी 2 मीटर लम्बी और 600 वर्ग मिमी क्षेत्रफल वाली एक-समान काट की एक छड़ पर भार लगे हैं। छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

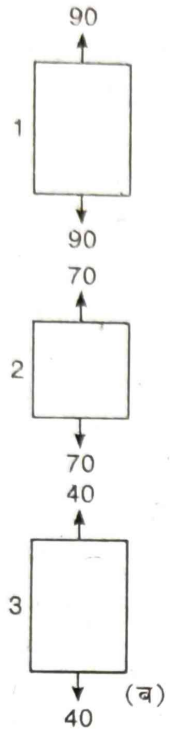
उत्तर: छड़ के ऊपरी सिरे पर प्रतिक्रिया = 20 + 30 + 40

= 90 kN ऊपर की ओर

पिछले प्रश्न के आधार पर चित्र (ब) के अनुसार छड़ के तीनों भागों पर बल लगेंगे। माना कि इन भागों की लंबाइयों में वृद्धि क्रमशः δl_1, δl_2 तथा δl_3 है, तब

$\delta l = \frac{F \times l}{AE}$ के अनुसार

ITI Question Bank.com



$$\delta l_1 = \frac{90000 \times 750}{600 \times 2 \times 10^5} = 0.5625\ mm$$

$$\delta l_2 = \frac{70000 \times 500}{600 \times 2 \times 10^5} = 0.2917\ mm$$

$$\delta l_3 = \frac{40000 \times 750}{600 \times 2 \times 10^5} = 0.25\ mm$$

अत: लम्बाई में कुल वृद्धि, $\delta l = \delta l_1 + \delta l_2 + \delta l_3$

$= 0.5625 + 0.2917 + 0.25$

$= 1.1042\ mm$

प्रश्न 24. चित्र के अनुसार 500 mm लम्बाई की दो छड़ें ऊर्ध्व में हैं। इन पर 30 kN का भार लटका है। इस्पात की छड़ का व्यास 30 mm तथा पीतल की छड़ का व्यास 40 mm है। दोनों छड़ों में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

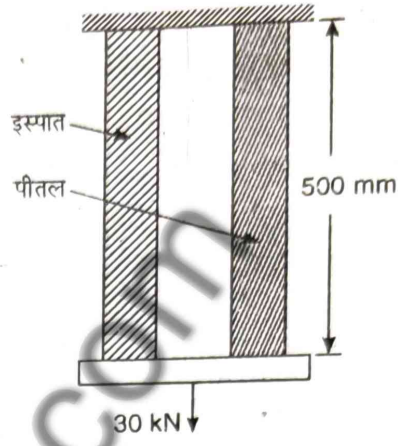
E इस्पात $= 2 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा

E पीतल $= 1.1 \times 10^5\ mm^2$

उत्तर: इन दोनों छड़ों से एक संयुक्त छड़ बनती है।

$l = 500\ mm$

$F = 30\ kN = 30 \times 10^3\ N$



इस्पात की छड़ की अनुप्रस्थ काट (cross-section) का क्षेत्रफल,

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \times 30^2 = 1256\ mm^2$$

पीतल की छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

$$A_2 = \frac{\pi}{4} \times 40^2 = 706\ mm^2$$

यदि इस्पात और पीतल में प्रतिबल क्रमश: p_1 तथा p_2 और उनके प्रत्यास्थता गुणांक E_1 तथा E_2 हैं तब हम जानते हैं कि संयुक्त छड़ के लिये,

$$F = p_1 A_1 + p_2 A_2 \qquad ...(1)$$

तथा, $$\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2} \qquad ...(2)$$

(2) से $$p_1 = p_2 \times \frac{E_1}{E_2} = p_2 \times \frac{2 \times 10^5}{1.1 \times 10^5} = p_2 \times 1.818$$

फिर (1) से, $F = 30 \times 10^3 = p_2 \times 1.818 \times 706 + p_2 \times 1256$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{30 \times 10^5}{2539.5} = 11.81\ N/mm^2$$

$p_1 = 11.81 \times 1.818$

$= 21.477\ N/mm^2$

ITQuestion Bank.com

अब $E = 2G\left(1-\frac{1}{m}\right)$

$= 2 \times 50 \times 10^3 (1 + 0{\cdot}335)$

$= 133{\cdot}5 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

फिर हम जानते हैं कि, $E = 3K\left(1-\frac{2}{m}\right)$

$\therefore$ आयतन गुणांक, $K = \frac{E}{3\left(1-\frac{2}{m}\right)}$

$= \frac{133{\cdot}5 \times 10^3}{3(1-0{\cdot}67)} = 134{\cdot}8 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

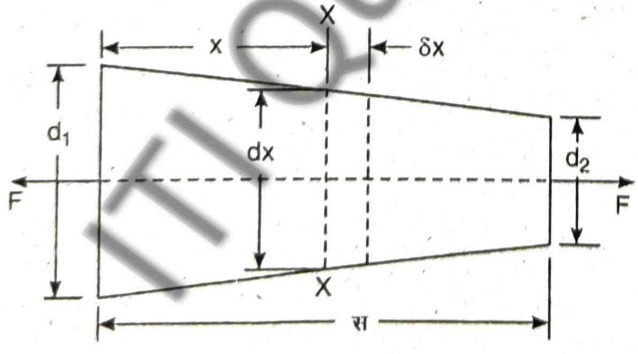
अत: $K = 1{\cdot}348 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

27. एक समान बदलती काट वाली छड़ के लिए विकृति सूत्र की व्युत्पत्ति किजिये।

उत्तर: चित्र में एक समान बदलती काट वाली छड़ दिखाई गई है। बड़े सिरे पर छड़ का व्यास d_1 है वह धीरे-धीरे कम होकर दूसरे सिरे पर d_2 हो जाता है। छड़ की लम्बाई l है तथा उसके दोनों सिरों पर F मान का तनाव बल (tensile force) कार्य करना है। इस अनुच्छेद में हम इस प्रकार की छड़ों के लिए कुल लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात करेंगे, बल तनाव या संपीडन (cmperssion) वाला हो सकता है।

बड़े सिरे से x दूरी (X – X काट) पर छड़ का, dx व्यास का तथा δx मोटाई का एक बहुत टुकड़ा मानिये।

अब l लम्बाई में व्यास में कमी $= (d_1 - d_2)$



$\therefore$ x लम्बाई में व्यास में कमी $= \frac{(d_1 - d_2)}{l} \times x$

$\therefore$ x लम्बाई पर छड़ की X – X काट का व्यास

$dx = [d_1 - (d_1 - d_2) \times x/l)$

$\therefore$ इस काट का क्षेत्रफल

$A_x = \frac{\pi}{4} d_x^{\,2} = \frac{\pi}{4}[d_1 - k \times x]$ जहाँ $k = \frac{(d_1 - d_2)}{l}$

अब, इस काट पर प्रतिबल, $px = \frac{F}{A_x} = \frac{F \times 4}{\pi[d_1 - kx]^2}$

यदि इस भाग में विकृति e_x है तब यंग मापांक, $E = \frac{p_x}{e_x}$

या $e_x = \frac{p_x}{E} = \frac{4 \times F}{\pi[d_1 - kx]^2 \times E}$

यदि इस छोटे भाग की लम्बाई में परिवर्तन δ (δx) होता है तब

$$e_x = \frac{\delta(\delta x)}{\delta x} = \frac{4F}{E(d_1 - kx)^2}$$

$\therefore$ $\delta(\delta x) = \frac{4F\delta x}{\pi E(d_1 - dx)^2}$

इस प्रकार छड़ की पूरी लम्बाई के लिये, लम्बाई में ऐसे सभी परिवर्तनों को जोड़ने पर छड़ की कुल लम्बाई में परिवर्तन

$$\delta l = \int_0^l \delta(\delta x) = \int_0^l \frac{4F\,\delta x}{\pi E (d_1 - kx)^2}$$

$$= \frac{4F}{\pi E} \int_0^l \frac{dx}{(d_1 - kx)^2}$$

$$= \frac{4F}{\pi E.k}\left[\frac{1}{d_1 - kx}\right]_o^p$$

$$= \frac{4F}{\pi E.k}\left[\frac{1}{(d_1 - kl)} - \frac{1}{d_1}\right]$$

अब k का मान रखने पर

$$\delta l = \frac{4F}{\pi E k}\left[\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}\right] = \frac{4Fl}{\pi E(d_1 - d_2)}\left[\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}\right]$$

इसलिये $\delta l = \frac{4Fl}{\pi E d_1 d_2}$

ITI Question Bank.com