

विकृति ऊर्जा (Strain Energy)

प्रश्न 1. निम्न को परिभाषित कीजिये।

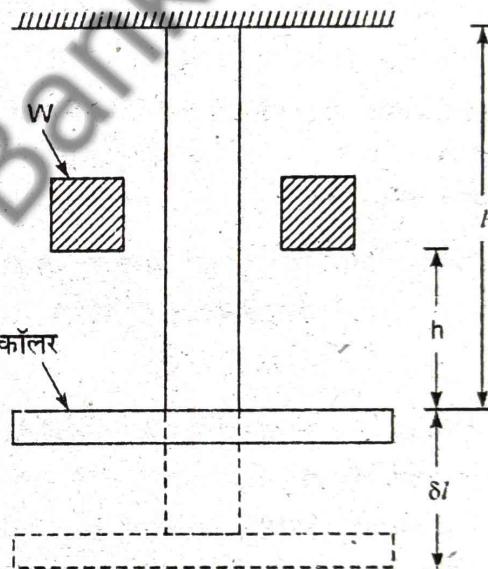
(2011, 2002, 2006)

- (a) विकृति ऊर्जा
- (b) संघात भार
- (c) प्रमाण विकृति ऊर्जा
- (d) विकृति ऊर्जा गुणांक
- (e) प्रमाण प्रतिबल

उत्तर:

- (a) **विकृति ऊर्जा:** प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर बाह्य भार या बल लगाने पर पिण्ड द्वारा इकट्ठी की गई ऊर्जा को “विकृति ऊर्जा” कहते हैं। या सुनम्यता (Resilience) भी कहते हैं।
- (b) **संघात भार (Impact Load):** इसको चित्र के द्वारा प्रदर्शित करते हुए माना कि किसी छड़ का काट का क्षेत्रफल ' A ' तथा लम्बाई ' l ' है। इसका ऊपरी सिरा बद्ध (fixed) है। तथा निचले सिरे पर एक कॉलर (collar) लगा है कॉलर पर W भार, h ऊँचाई से गिरता है और कॉलर से संघटन करता है। फलस्वरूप छड़ की लम्बाई में δl की वृद्धि हो जाती है। इसी को हम संघात भार कहते हैं। भार द्वारा छड़ पर किया गया कार्य, भार की स्थितिज ऊर्जा के बराबर होता है।
- (c) **प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience):** प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर किसी पिण्ड द्वारा शोषित अधिकतम ऊर्जा को ‘प्रमाण विकृति ऊर्जा’ कहते हैं।
- (d) **विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of Resilience):** छड़ या पिण्ड की प्रति इकाई आयतन के लिये प्रमाण विकृति या सुनम्यता मापांक कहते हैं।

- (e) **प्रमाण प्रतिबल (Proof Stress):** प्रमाण विकृति ऊर्जा की दशा में पदार्थ में उपजा प्रतिबल ही “प्रमाण प्रतिबल” कहलाता है। यह प्रतिबल पदार्थ में प्रत्यास्थता सीमा के समय प्रतिबल के बराबर होता है।



प्रश्न 2. स्थैतिक तथा गतिशील भार में अन्तर बताइये।

(2003)

उत्तर: **स्थैतिक भार:** यह भार अनन्त समय तक एक स्थान पर स्थिर बने रहते हैं। जैसे: पुल का भार, मकान, मशीन आदि का भार।

गतिशील भार: यह भार एक स्थान से दूसरे स्थान तक चलते रहते हैं। जैसे: सड़क पर चलते वाहन का भार, पटरी पर चलती गाड़ी का भार आदि।

प्रश्न 3. संघट्ट गुणांक की परिभाषा दीजिये।

(2003)

उत्तर: किसी प्रत्यास्थ पिण्ड पर लगाये गये स्थैतिक भार (P) तथा संघट्ट भार (W) के कारण विरूपण के अनुपात को उस पिण्ड का संघट्ट गुणांक कहते हैं।

$$\text{संघट्ट गुणांक} = \frac{\text{स्थैतिक भार}}{\text{संघट्ट भार}}$$

$$\boxed{\text{संघट्ट गुणांक} = \frac{P}{W}}$$

प्रश्न 4. तात्क्षणिक प्रतिबल से आप क्या समझते हैं? संघट्ट भारण में इसका क्या महत्व है? (2004)

उत्तर: तात्क्षणिक प्रतिबल किसी मशीन अवयव की परिवर्ती भारित अवस्था में उस अवयव में किसी विशेष क्षण पर उत्पन्न प्रतिबल को मशीनी अवयव का तात्क्षणिक प्रतिबल कहते हैं। संघट्ट भारण में इस प्रतिबल के द्वारा ही मशीनी अवयव का अभिकल्पन किया जाता है।

प्रश्न 5. संघट्ट भार एवं प्रधात भार से क्या तात्पर्य है? उचित उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए। (2011)

उत्तर: उत्तर प्रश्न सं. (1) में देखें।

प्रश्न 6. एक समान काट वाली (L) लम्बाई की एक शुद्धालम्बी धरन के मध्य बिन्दु पर h ऊँचाई से $M \text{ kg}$ द्रव्यमान का पिण्ड गिरता है। धरन के लिये नमन दृणता EI है। निकाय के लिये संघट्ट गुणांक ज्ञात कीजिये।

उत्तर: यदि परिणाम का स्थैतिक भार शुद्ध आलम्बित धरन के मध्य में लगा हो तो, विस्थापन $\partial l = \frac{Pl^3}{48EI}$

$$\boxed{P = \frac{48EI \partial l}{l^3}}$$

धरन में एकत्रित ऊर्जा $U = \frac{1}{2} P \partial l = \frac{24EI(\partial l)^2}{l^3}$, यह

ऊर्जा W भार की स्थिति ऊर्जा के बराबर होगी। अतः

$$W(h + \partial l) = \frac{24EI(\partial l)^2}{l^3}$$

$$\partial l^2 - \frac{wl^3}{24EI} \partial l - \frac{wl^3}{24EI} h = 0$$

$$\text{माना कि, } \partial l_s = \frac{wl^3}{48EI}$$

$$\partial l^2 - 2\partial l_s \cdot sl - 1\partial l_s h = 0$$

$$\partial l = \partial l_s + \sqrt{\partial l_s^2 + 2h \cdot \partial l_s}$$

$$h \ggg \partial l_s$$

$$\partial l = \sqrt{2h \partial l_s}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial l_s} &= \sqrt{\frac{2h}{\partial l_s}} = \sqrt{2h / \frac{wl^3}{48EI}} \\ &= \sqrt{\frac{96EIh}{wl^3}} \end{aligned}$$

$$\text{अतः संघट्ट गुणांक} = \frac{\partial l}{\partial l_s} = \sqrt{\frac{96EIh}{Mgl^3}}$$

[$W = mg$ रखने पर]

$$\boxed{\frac{P}{W} = \frac{\partial l}{\partial l_s} = \sqrt{\frac{96EIh}{mgl^3}}} \quad \left[\frac{P}{W} = \frac{\partial l}{\partial l_s} \right]$$

प्रश्न 7. एक छड़ पर जिसका आन्तरिक व्यास 12 mm तथा बाह्य व्यास 20 mm है, 8N के अक्षीय स्थिर भार लगाने से 3mm तनित होती है। यदि इस छड़ के निचले सिरे पर बने कॉलर पर एक 80 kg का पिण्ड 80mm ऊँचाई से गिराया जाता है तब इसमें कितना अधिकतम प्रतिबल उत्पन्न होगा जबकि यह आरम्भ में प्रतिबल रहित अवस्था में हो। दिया है

$$E = 300 \text{ kN/mm}^2 \quad (2004)$$

उत्तर: छड़ का आन्तरिक व्यास, $d = 12\text{mm}$

छड़ का बाह्य व्यास, $D = 20 \text{ mm}$

अक्षीय भार $P = 8000 \text{ N}$

छड़ की लम्बाई में वृद्धि $\delta l = 3 \text{ mm}$

छड़ पर संघट्ट भार $W = 800 \text{ N}$

भार की ऊँचाई $h = 80 \text{ mm}$

$$\text{छड़ की काट का क्षे. } (A) = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (20^2 - 12^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (256) = \frac{256\pi}{4} \text{ mm}^2$$

$$A = 64\pi \text{ mm}^2$$

की मूल लम्बाई $l = \frac{AE \times \delta l}{P}$

$$= \frac{64\pi \times 2 \times 10^5 \times 3}{8000}$$

$$l = 15080 \text{ mm}$$

अतः छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल

$$\sigma_{\max} = \frac{W}{A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{wl}} \right)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{800}{64\pi} \left[1 + \sqrt{\frac{2 \times 64\pi \times 2 \times 10^5 \times 80}{800 \times 15080}} \right]$$

$$= 3.98 [1 + \sqrt{533.3}]$$

$$= 3.98 [1 + 23.1]$$

$$= 3.98 \times 24.1$$

$$\sigma_{\max} = 95.92 \text{ N/mm}^2 \quad \text{Ans.}$$

प्रश्न 8. एक वृत्ताकार परिच्छेद की छड़ का व्यास 10 mm तथा लम्बाई 2 mm है अपने ऊपरी सिरे पर दृढ़तापूर्वक बद्ध ऊर्ध्वाधर लटक रही है। इसके निचले सिरे पर एक दृढ़कालर बना हुआ है। छड़ के सह अक्षीय 50 mm की दूरी पर से एक 5kN का भार

कॉलर पर गिरता है, छड़ में उत्पन्न अधिकतम अभिलम्ब प्रतिबल का तथा साम्यावस्था की स्थिति में छड़ द्वारा संचित ऊर्जा की मान ज्ञात कीजिये। (2005)

उत्तर: छड़ का व्यास (d) = 10 mm

छड़ की लम्बाई (l) = 2000 mm

संघट्ट भार (W) = 5000 N

कालर से संघट्ट भार की ऊँचाई (h) = 5000 mm

यंग मापांक $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma = \frac{W}{A} + \sqrt{\left(\frac{W}{A}\right)^2 + \frac{2WEh}{Al}}$$

$$\text{छड़ की काट का क्षे. } A = \frac{\pi}{4} \times 10^2 = 25\pi \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{5000}{25\pi} + \sqrt{\left(\frac{5000}{25\pi}\right)^2 + \frac{2 \times 5000 \times 2 \times 10^5 \times 50}{25\pi \times 2000}}$$

$$\sigma = 864.1 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{छड़ में संचित ऊर्जा, } U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l$$

$$U = \frac{(864.1)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times 25\pi \times 2000$$

$$U = 293216.2 \text{ N-mm}$$

$$U = 293.2162 \text{ N-m} \quad \text{Ans.}$$

प्रश्न 9. एक छड़ जिसके निचले सिरे पर कालर फिट किया हुआ है, पर ' W ' भार ' h ' ऊँचाई से गिरता है तो छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल के लिए एक व्यंजक उत्पन्न कीजिये। (2007, 09)

उत्तर: विकृति ऊर्जा $U = W$ द्वारा किया गया कार्य

= W की स्थितिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2} R \times \delta l = w(h + \delta l)$$

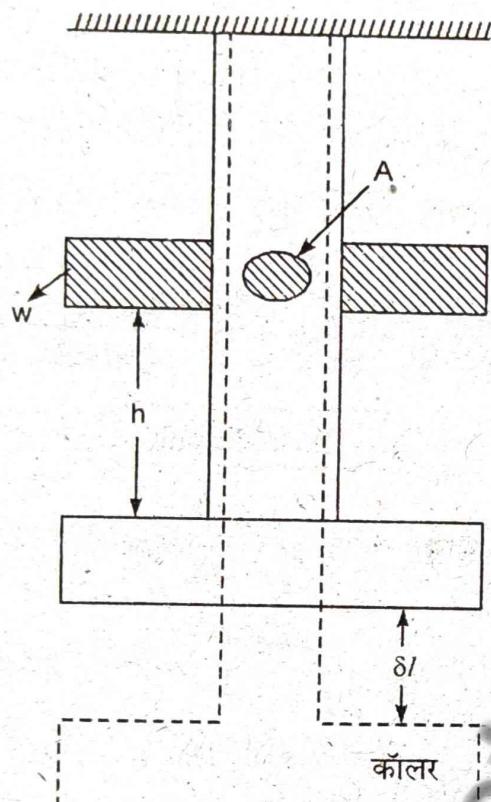
$$\frac{1}{2} \sigma_A \times \frac{\sigma l}{E} = w \left(h + \frac{\sigma l}{E} \right)$$

$$\frac{\sigma^2 Al}{2E} = wh + \frac{w\sigma l}{E}$$

$$\sigma^2 = \frac{wh \times 2E}{Al} + \frac{w\sigma l}{E} \times \frac{2E}{Al}$$

$$\sigma^2 = \frac{2whE}{Al} + \frac{2w\sigma}{A}$$

$$\sigma^2 - \frac{2w\sigma}{A} - \frac{2whE}{Al} = 0$$



$$\sigma = \frac{2W}{A} \pm \sqrt{\left[\frac{4w^2}{A^2} + \frac{8whE}{Al} \right]} / 2$$

$$\sigma = \frac{2W}{A} \pm \sqrt{4 \left[\left(\frac{w}{A} \right)^2 + \frac{2whE}{Al} \right]} / 2$$

$$\sigma = \frac{2W}{A} \pm 2 \sqrt{\left[\frac{w^2}{A^2} + \frac{2whE}{Al} \right]} / 2$$

$$\sigma = \frac{w}{A} \pm \sqrt{\left[\frac{w^2}{A^2} + \frac{2whE}{Al} \right]}$$

$$\sigma = \frac{w}{A} \pm \sqrt{\frac{w^2}{A^2} + \frac{2whE}{Al}}$$

Ans.

छड़ पर भार लगने की दिशा में $h=0$ होगा।

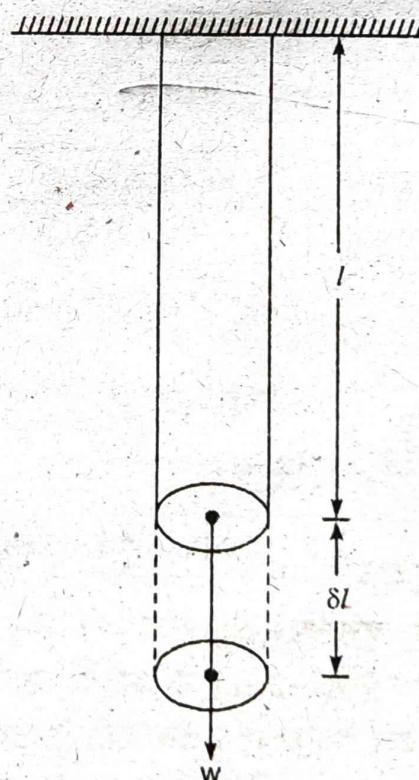
$$\sigma = \frac{W}{A} + \frac{W}{A}, \sigma = \frac{2W}{A}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{2W}{A}$$

$$P = 2W \quad \text{Ans.}$$

प्रश्न 10. एक छड़ पर अक्षीय तनन भार P लगाया गया है। यदि छड़ की लम्बाई l इसका अभिलम्ब परिच्छेद A तथा प्रत्यास्थता मापांक E हो तब इसकी विकृति ऊर्जा की व्यंजक ज्ञात कीजिए। (2008, 13)

उत्तर: माना कि एक छड़ जो कि उधर्धाधर है तथा उसका एक सिरा (end) बद्ध है तथा निचले सिरे पर तनन भार (P) लगाया गया है। जिससे की लम्बाई में δl की वृद्धि होती है। जिसके कारण छड़ आन्तरिक प्रतिरोधी बल R पैदा हो जाता है।



यदि छड़ की लम्बाई l अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A हो तो आन्तरिक प्रतिरोधी बल R के द्वारा छड़ पर किया

गया कार्य (Work) विकृति ऊर्जा (strain energy) के बराबर होगा।

$$\text{विकृति ऊर्जा}, U = \frac{1}{2} \times R \times \delta l$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sigma \times A) \times \frac{\sigma l}{\delta}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} (A \times l)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} (V) \quad [V = \text{छड़ का आयतन}]$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 V}{E}$$

प्रश्न 11. प्रत्यास्थता को परिभाषित कीजिए। एक पिण्ड पर एकाएक लगाये गये भार से उत्पन्न प्रतिबल के लिये व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

उत्तर: कोई भी पदार्थ जिस यांत्रिक गुण के कारण उस पर लगे बाह्य बल का दृढ़तापूर्वक विरोध करता है तथा इसी गुण के कारण पदार्थ बाह्य बल की अनुपस्थिति में अपने प्रारम्भिक आकार को ग्रहण कर लेता है। वस्तु के इसी गुण को प्रत्यास्थता कहते हैं।

माना किसी छड़ पर अचानक W परिमाण का भार लगा दिया जाता है, तो उसमें [अ] प्रतिबल उत्पन्न होता है।

$$\text{विकृति ऊर्जा} = W \times \delta l$$

$$= W \times \delta l \quad \text{ग्राफ का क्षेत्र}$$

$$\text{विकृति ऊर्जा} = \frac{1}{2} \times R \times \delta l$$

(धीरे-धीरे भार लगाने पर)

$$W \times \delta l = \frac{1}{2} \times R \times \delta l$$

$$2W = R$$

$$\Rightarrow \frac{2W}{A} = \frac{R}{A}$$

$$\frac{R}{A} = \frac{2W}{A}$$

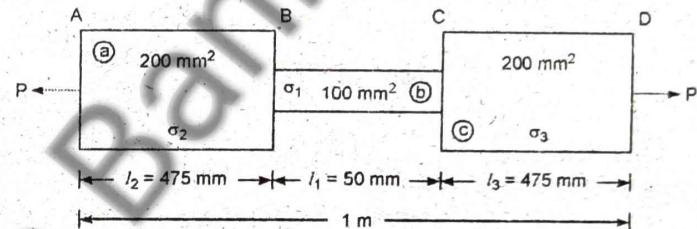
$\sigma = 2\sigma$
(अचानक) (धीरे-धीरे)

जहाँ R -प्रतिरोधी बल (आन्तरिक)

A-अनुपस्थिति काट

प्रश्न 12. एक 1m की छड़ को खीचने में उसमें अधिकतम उत्पन्न प्रतिबल 150 N/mm^2 है। काट का क्षेत्रफल तथा लम्बाईयाँ चित्र में दर्शायी गयी हैं। छड़ में संचित विकृति ऊर्जा की गणना कीजिए यदि $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

उत्तर:



$$\text{कुल लम्बाई} = 1\text{m} = 1000\text{ mm}$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_1 = 150 \text{ N/mm}^2$$

[100 mm^2 वाले भाग में होगा]

200 mm^2 वाले भाग में प्रतिबल

$$\sigma_2 = \frac{150}{2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 75 \text{ N/mm}^2$$

छड़ में एकत्रित कुल विकृति ऊर्जा

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U = \frac{\sigma_1^2 A_1 l_1}{2E} + \frac{\sigma_2^2 A_2 l_2}{2E} + \frac{\sigma_3^2 A_3 l_3}{2E}$$

$$U = \frac{150^2 \times 100 \times 50}{2 \times 2 \times 10^5}$$

$$+ \frac{75^2 \times 200 \times 475}{2 \times 2 \times 10^5} + \frac{75^2 \times 200 \times 475}{2 \times 2 \times 10^5}$$

$$U = 281.25 + 1335.9375 + 1335.9375$$

$$U = 2953.125 \text{ N-mm}$$

Ans.

or

$$U = 2.953 \text{ N-m}$$

Ans.