मरोड़ (Torsion)

प्रश्न 1. निम्नलिखित की परिभाषा दीजिये। (2003)
(a) बल आघूर्ण (b) मरोड़ कोण (c) अपरूपण विकृति (d) मरोड़ दुर्नम्यता।

उत्तर: (a) बल आघूर्ण: किसी दृढ़ पिण्ड पर लगने वाले बलयुग्म के आघूर्ण को ही बल आघूर्ण कहते हैं।

बल आघूर्ण = बल × बलयुग्म की भुंजा

(b) मरोड़ कोण: किसी वृत्ताकार शाफ्ट के एक सिरे को बद्ध करके दूसरे सिरे पर आघूर्ण लगाया जाये तो दूसरे सिरे की परिधि पर स्थित बिन्दु के विस्थापन द्वारा शाफ्ट के केन्द्र पर बनाये गये कोण को मरोड़ कोण कहते हैं। इसको (θ) से दर्शाते हैं।

(c) अपरूपण विकृति: किसी शाफ्ट पर लगे बाह्य मरोड़ आघूर्ण के कारण शाफ्ट में उत्पन्न कर्तन प्रतिबल तथा शाफ्ट के कर्तन गुणांक के अनुपात को कर्तन विकृति कहते हैं।

(d) मरोड़ दुर्नम्यता: शाफ्ट की निश्चित लम्बाई में शाफ्ट की परिधि पर इकाई रेडियन मरोड़ कोण उत्पन्न करने के लिये आवश्यक मरोड़ आघूर्ण को ही मरोड़ दुर्नम्यता कहते हैं।

या

मरोड़ कोण (θ) और मरोड़ आघूर्ण के अनुपात को मरोड़ दुर्नम्यता कहते है।

प्रश्न 2. ध्रुवीय मापांक तथा मरोड़ प्रतिस्थितित्व की परिभाषा दीजिये। (2004)

उत्तर: ध्रुवीय मापांक: किसी शाफ्ट के ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण और शाफ्ट की बाहय त्रिज्या के अनुपात को शाफ्ट का ध्रुवीय मापांक कहते हैं। इसे (z_p) से दर्शाते हैं।

$$z_p = \frac{J}{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} J \rightarrow \text{जड़त्व आघूर्ण} \\ R \rightarrow \text{बाह्य त्रिज्या} \end{array}\right\}$$

मरोड़ प्रतिस्थितित्व: मरोड़ आघूर्ण के द्वारा शाफ्ट को कोण ऐठने पर शाफ्ट में संचित्र ऊर्जा को शाफ्ट का मरोड़ प्रतिस्थितित्व कहते है।

$$\text{मरोड़ प्रतिस्थितित्व} = \frac{1}{2} \times T \times \theta$$

$$\left\{\begin{array}{l} T \rightarrow \text{मरोड़ आघूर्ण} \\ \theta \rightarrow \text{कोण} \end{array}\right\}$$

प्रश्न 3. खोखला शाफ्ट किस प्रकार से ठोस शाफ्ट से श्रेष्ठ है? सभी श्रेष्ठताओं को सूचीबद्ध कीजिए। (2001) (2011)

उत्तर: ठोस शाफ्ट की अपेक्षा खोखली शाफ्ट को श्रेष्ठताऐं निम्न प्रकार हैं।

(a) पदार्थ का खर्चा कम होता है।

(b) खोखली शाफ्ट के अनुप्रस्थ काट की दक्षता बढ़ जाती है।

(c) खोखली शाफ्ट का भार कम होता है।

(d) खोखली शाफ्ट में बाह्य मरोड़ सहने की क्षमता बढ़ जाती है।

(e) खोखली शाफ्ट के अन्दर से अन्य क्रियाकारी अंग गुज़ारे जा सकते हैं।

प्रश्न 4. 150 mm व्यास का ठोस शाफ्ट मरोड़ आघूर्ण पारेषित करने के लिए प्रयोग किया जाता है। शाफ्ट द्वारा पारेषित अधिकतम मरोड़ आघूर्ण ज्ञात कीजिये

ITI Question Bank.com

यति अधिकतम उत्पन्न अपरूपण प्रतिबल 45 N/mm² तक सीमित हो। (2002)

उत्तर: दिया है

शाफ्ट का व्यास $d = 150$ mm

कर्तन प्रतिबल $\tau = 45$ N/mm²

अधिकतम मरोड़ आघूर्ण $T = \frac{\pi}{16} \times d^3 \times \tau$

$$T = \frac{\pi}{16} \times (150)^3 \times 45$$

$$T = \frac{\pi}{16} \times 150 \times 150 \times 150 \times 45$$

$$T = 29820586.5 \text{ N-m.}$$

$$\boxed{T = 29.82 \text{ kN–m}}$$

प्रश्न 5. 100 rpm पर एक 100 mm व्यास की ठोस शाफ्ट द्वारा 120 kW की शक्ति पारेषित की जानी है। शाफ्ट के अन्दर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। यदि शाफ्ट की लम्बाई 6m हो तो मरोड़ कोण (θ) ज्ञात कीजिये। G का मान 80GN/m² मानिये।

उत्तर: दिया है

$G = 80$ GN/m²

$N = 100$ rpm

$d = 100$ mm

$P = 120$ kW

$l = 6000$ mm

We know that

$$P = \frac{2\pi NT}{60}$$

$$T = \frac{60 \times P}{2\pi N} = \frac{60 \times 120 \times 10^3}{2\pi \times 100}$$

$$T_1 = 11459.16 \text{ N-m.}$$

मरोड़ आघूर्ण $(T) = 11459160$ N-mm.

$$T = \frac{\pi}{16} \tau_s d^3$$

(कर्तन प्रतिबल) $\tau_s = \frac{16T}{\pi d^3}$

$$= \frac{16 \times 11459160}{\pi \times (100)^3} = 58.36 \text{ N/mm}^2.$$

$\frac{\tau_s}{r} = \frac{G\theta}{l}$ से,

$$\theta = \frac{\tau_s \times l}{r} = \frac{58.36 \times 6000}{80000 \times 50}$$

$$= 0.08754 \text{ (Rad) रेडियन}$$

या $\boxed{\theta = 5.0157°}$ **Ans.**

प्रश्न 6. एक इस्पात के शाफ्ट द्वारा 200 rpm पर 75 kW शक्ति पारेषित की जाती है। यदि अधिकतम बलघूर्ण, औसत बलघूर्ण से 30% अधिक हो तथा अधिकतम अपरूपण प्रतिबल 70N/mm² हो तो शाफ्ट का समुचित व्यास ज्ञात कीजिये। (2004)

उत्तर: दिया हुआ है

पारेषित शक्ति $P = 75000$ watt.

शाफ्ट की गति $N = 200$ rpm

$T_{max} = 1.3$ Tav

$\tau_s = 70$ N/mm².

We know that,

$$P = \frac{2\pi N T_{av}}{60}$$

$$\frac{P \times 60}{2\pi N} = T_{av}$$

$$\frac{75000 \times 60}{2\pi \times 200} = T_{av}$$

$\boxed{3581 = T_{av}}$ $\boxed{T_{av} = 3581 \text{ N-m}}$

$$T_{max} = 1.3\, T_{av}$$
$$= 1.3 \times 3581 = 4655.300 \text{ N.m.}$$

मरोड समी. से,

$$T_{max} = \frac{\pi}{16} \tau_s \times d^3$$

$$d^3 = \frac{16\, T_{max}}{\tau_s \times \pi}$$

$$= \frac{16 \times 4655.300}{70 \times \pi} = 338703.55$$

$$d^3 = 338703.55$$

$\boxed{d = 69.7 \text{ mm}}$ *or* $\boxed{d = 70 \text{ mm}}$

प्रश्न 7. एक 40 mm व्यास का ठोस शाफ्ट 1000 rpm पर घूमते हुए 20 kNm का बल आघूर्ण पारेषित करता है। यदि इस शाफ्ट को एक खोखली शाफ्ट से प्रतिस्थापित कर दिया जाये जिसका बाह्य व्यास, आन्तरिक व्यास से दो गुना हो तथा वह उतनी ही शक्ति पारेषित करे जितना ठोस शाफ्ट करता है। तो खोखले शाफ्ट का बाह्य तथा अन्तः व्यास ज्ञात कीजिये। तथा दोनों शाफ्टों में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों का मान भी ज्ञात कीजिये। (2005)

उत्तर: दिया हुआ है

$$N = 1000 \text{ rpm}$$
$$d_s = 40 \text{ mm}$$
$$T_{max} = 20 \times 10^6 \text{ N-m}$$

मरोड़ समी. से,

$$T_{max} = \frac{\pi}{16} \times \tau_s \times d_s^3$$

$$\tau_s = \frac{16 \times T_{max}}{\pi \times d_s^3}$$

$$\tau_s = \frac{16 \times 20 \times 10^6}{\pi \times (40)^3}$$

$$= 1591.5 \text{ N/mm}^2 \quad \textbf{Ans.}$$

चूँकि ठोस शाफ्ट के स्थान पर खोखली शाफ्ट प्रयोग की जानी है। इसलिये खोखली शाफ्ट में उत्पन्न कर्तन प्रतिबल भी ठोस शाफ्ट के कर्तन प्रतिबल के बराबर ही होगा।

$$\tau_{sh} = 1591.5 \text{ N/mm}^2 \quad \textbf{Ans.}$$

According to question,

खोखली शाफ्ट का बाह्य व्यास $D = 2 \times d$

खोखली शाफ्ट के मरोड़ समीकरण से,

$$T_{max} = \frac{\pi}{16} \times \tau_s \left[\frac{D^4 - d^4}{D}\right]$$

$$20 \times 10^6 = \frac{\pi}{16} \times 1591.5 \times \left[\frac{16d^4 - d^4}{2d}\right]$$

$$20 \times 10^6 = \frac{\pi}{16} \times 1591.5 \times d^3 \times 7.5$$

$$\frac{20 \times 10^6 \times 16}{\pi \times 1591.5 \times 7.5} = d^3$$

या
$$d^3 = \frac{20 \times 16 \times 10^6}{\pi \times 1591.5 \times 7.5}$$

$$d^3 = \frac{32 \times 10^7}{37479.82}$$

$$d^3 = 8533.3$$

आन्तरिक व्यास $d = 20.434$ mm **Ans.**

बाह्य व्यास $D = 2d = 2 \times 20.434$

$$D = 40.86 \text{ mm} \quad \textbf{Ans.}$$

प्रश्न 8. एक खोखली शाफ्ट का आन्तरिक व्यास इसके बाह्य व्यास का 2/3 है। इसकी मरोड़ शक्ति की तुलना एक उसी वजन एवं पदार्थ से बनी ठोस शाफ्ट से कीजिये। (2006)

ITI Question Bank.com

उत्तर: Given,

खोखली शाफ्ट का अन्तः व्यास $d = \frac{2}{3}D$ (बाह्य व्यास)

या $\quad D = 1.5\,d$

खोखली शाफ्ट का भार (W_h) ठोस शाफ्ट का भार (W_s)

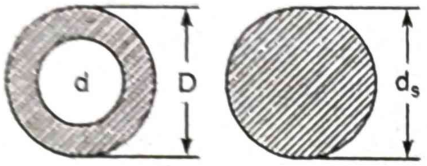
$$W_h = A_h \times l_h \times \rho_h \times g$$

$$W_s = A_s \times l_s \times \rho_s \times g$$

हम जानते हैं कि $W_h = W_s$

$$A_h \times l_h \times \rho_h \times g = A_s \times l_s \times \rho_s \times g$$

$$A_h = A_s$$



$$A_h = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

$$A_s = \frac{\pi}{4}d_s^2$$

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}d_s^2$$

$$\frac{\pi}{4}[(1.5d)^2 - d^2] = \frac{\pi}{4}d_s^2$$

$$\frac{\pi}{4}[1.5^2 - 1]d^2 = \frac{\pi}{4}d_s^2$$

$$[2.25 - 1]d^2 = d_s^2$$

or $\quad d_s = d\sqrt{1.25}$

$$\boxed{d_s = 1.118 \times d}$$

मरोड़ शक्ति की तुलना,

$$\frac{T_h}{T_s} = \frac{J_h \times R_s}{J_s \times R_h} = \frac{\frac{\pi}{32}[D^4 - d^4] \times \frac{d_s}{2}}{\frac{\pi}{32}d_s^4 \times \frac{D}{2}}$$

$$\frac{T_h}{T_s} = \frac{[D^4 - d^4] \times \frac{d_s}{2}}{d_s^4 \times \frac{D}{2}} = \frac{[(1.5)^4 - 1] \times d^4 \times d_s}{d_s^4 \times 1.5\,d}$$

$$\frac{T_h}{T_s} = \frac{4.0625 \times d^3}{1.5 \times d_s^3} = \frac{4.0625\,d^3}{1.5 \times (1.118)^3 \times d^3}$$

$$\frac{T_h}{T_s} = \frac{4.0625}{2.0961} = 1.9381$$

$$\boxed{T_h = 1.9381\,T_s}$$

प्रश्न 9. एक 20 mm व्यास का ठोस शाफ्ट 2 kN-m का बल आघूर्ण 600 rpm पर पारेषित करता है। इसके द्वारा पारेषित शक्ति उत्पन्न अधिकतम अपरुपण प्रतिबल तथा इसके प्रतिबल तथा इसके प्रति एकांक लम्बाई का ऐंठन कोण ज्ञात कीजिए। {G = 80 GPa का मान लीजिए} **(2007)**

उत्तर: Given

$d = 20\text{ mm} = 0.2\text{ m}$

$T = 2\text{ kN-m} = 2000\text{ N-m}$

$N = 600\text{ rpm}$

$G = 80\text{ GPa} = 80 \times 10^9\text{ N/m}^2$

$$P = \frac{N \times T}{9550}\text{ kW}$$

$$= \frac{600 \times 2000}{9550} = 125.65\text{ kW}$$

अधिकतम अपरुपण प्रतिबल

$$\tau = \frac{T \times r}{J} \qquad \left[\text{जहां } r = \frac{d}{2}\right]$$

प्रश्न 10. एक शाफ्ट जिसकी लम्बाई *l*, व्यास d तथा दृढता गुणांक G यदि इस पर बल आघूर्ण 'τ' सक्रिय हो तब इसमे संग्रहीत विकृति ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए। **(2007)**

ITI Question Bank.com

उत्तर: Given,

शाफ्ट की लम्बाई $= l$

व्यास $= d$

दृढ़ता गुणांक $= G$

बल घूर्ण $= T$

हम जानते हैं कि, किसी शाफ्ट में एकत्रित हुई कुल विकृति ऊर्जा $\left[U = \frac{1}{2} t.\theta\right]$ जहां θ ऐंठन कोण है।

मरोड़ सम्बंध से,

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$$

$$\theta = \frac{Tl}{J.G} \qquad \left[J = \frac{\pi d^4}{32}\right]$$

$$\theta = \frac{Tl}{\frac{\pi d^4}{32} \times G} = \frac{32Tl}{\pi d^4 \times G}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{T \times T.l \times 32}{\pi d^4 \times G}$$

कुल विकृति ऊर्जा $\boxed{\theta = \frac{16T^2.l}{\pi d^4 \times G}}$

प्रश्न 11. एक ठोस शाफ्ट 600 rpm पर 10 kW की शक्ति पारेषित करता है। यदि इसका अनुमेय अपरूपण प्रतिबल 100 MPa हो तो न्यूनतम आवश्यक शाफ्ट व्यास की गणना कीजिए। शाफ्ट का दृढ़ता गुणाँक 80 GPa है। इसका प्रति लम्बाई ऐठंन कोण भी ज्ञात कीजिए। (2008)

उत्तर: Given,

$P = 10\,\text{kW} = 10 \times 10^3$ watt

$N = 600$ rpm

$\tau_s = 100\,\text{MPa} = 100\,\text{N/mm}^2$

$G = 80\,\text{GPa} = 80 \times 10^3\,\text{N/mm}^2$

$$T_{av} = \frac{P \times 60}{2\pi N} \times 1000$$

$$= \frac{10 \times 10^3 \times 60 \times 1000}{2\pi \times 600}$$

$$= 159154.94\,\text{N-mm}$$

मरोड़ समी० से,

$$\frac{T_{\max}}{J} = \frac{\tau_s}{R} = \frac{G\theta}{l}$$

We know that

$$d^3 = \left[\frac{16 \times T_{\max}}{\pi \times \tau_s}\right]$$

$$d^3 = \left[\frac{16 \times 159154.94}{\pi \times 100}\right]$$

$$d = \left[\frac{16 \times 159154.94}{\pi \times 100}\right]^{1/3} = [8105.69]^{1/3}$$

$$\boxed{d = 20.08\,mm}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{20.08}{2} = 10.04\,mm$$

$$\boxed{R = 10.04\,mm}$$

$$\theta = \frac{\tau_s \times l}{G \times R} = \frac{100 \times 1}{80 \times 10^3 \times 10.04}$$

$Q = 0.0001245$ Radian

$\boxed{\theta = 0.007130°}$ {रेडियन Radian} **Ans.**

ITI Question Bank.com

16. ऐंठन सूत्र $\frac{T}{J}=\frac{\tau}{R}=\frac{G\theta}{l}$ में निहित संकल्पनाओं (Assumptions) का स्पष्ट करते हुए इसकी व्युत्पत्ति कीजिए।

उत्तरः ऐंठन सूत्र या मरोड़ समीकरण ज्ञात करने के लिए कुछ मान्यताएं निम्न प्रकार ली जाती हैं।

1. शाफ्ट के पदार्थ का घनत्व, पूरी लम्बाई पर समान है।
2. शाफ्ट का वृत्ताकार खण्ड़ शाफ्ट पर भार लगाने के बाद भी वृत्ताकार रहना चाहिए।
3. शाफ्ट के काट-खण्ड भार से पूर्व एंव भार लगाने के बाद भी समतल रहने चाहिए।
4. बलयुग्म लगाने के पश्चात् काट खण्ड़ों के बीच दूरी स्थिर रहनी चाहिए।

मरोड़ समीकरणः [Torsional Equation]:

चित्र (i) में l लम्बाई की शाफ्ट का एक सिरा बद्ध (fix) है, तथा दूसरा सिरा मुक्त सिरे पर 'T' बलयुग्म आने से LM रेखा Twist होकर LM′ पर आ जाती है यदि LM व LM′ के बीच पृष्ठीय कोण (Surface Angle) 'θ' तथा काट खण्ड पर मरोड़ कोण 'θ' है। तो कर्तन विकृति,

कर्तन विकृति $\theta=\frac{MM'}{\rho}$

$$\boxed{\theta=\frac{\tau}{G}}\qquad \left\{\begin{matrix}\tau\rightarrow \text{कर्तन प्रतिबल}\\ G\rightarrow \text{दृढ़ता मापांक}\end{matrix}\right\}$$

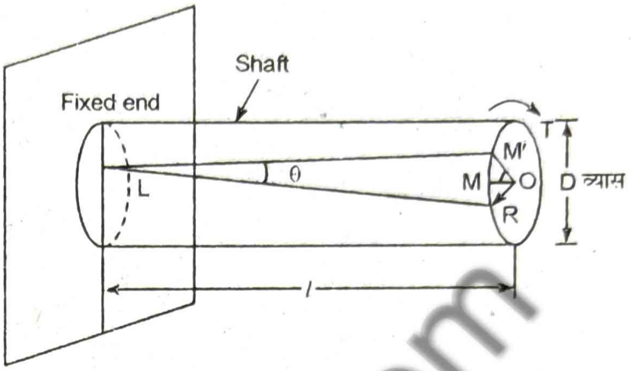
$$\therefore\quad \frac{MM'}{l}=\frac{\tau}{G}$$

But, $MM'=R\theta$

[Where $R\rightarrow$ Radius of shaft]

then, $\frac{R\theta}{l}=\frac{\tau}{G}$

$$\therefore\quad \frac{\tau}{R}=\frac{G\theta}{l}\qquad \boxed{\tau=\frac{G\theta}{l}\times R}$$



चित्र (i)

$$\therefore\quad \tau=K.R$$

$$\left[\text{where } K=\frac{G\theta}{l}=\text{constant}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{\tau\propto R}$$

$$\therefore\quad \frac{\tau}{R}=\frac{\tau_1}{r_1}=\frac{\tau_2}{r_2}=\frac{\tau_3}{r_3}=\text{नियतांक}$$

r_1, r_2, r_3 आदि त्रिज्याओं पर यदि कर्तन प्रतिबल τ_1, τ_2, τ_3,... आदि हैं तब उनके अनुपात आपस में नियत रहेंगें। लेकिन यदि $r=0$ तो $\tau=0$

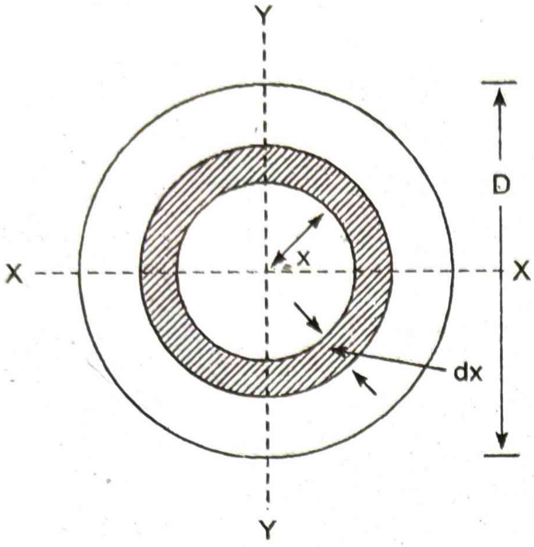
अतः शाफ्ट की परिधि पर कर्तन प्रतिबल τ का मान अधिकतम् होगा तथा शाफ्ट के केन्द्र पर कर्तन प्रतिबल τ का मान r के शून्य होने पर शून्य होगा।

For Torsional equation

According to Diagram (ii)

यदि शाफ्ट पर बाहर से 'T' घूर्ण लगाया गया है तब सन्तुलन की अवस्था में अपने कर्तन बलों के कारण प्रतिरोधी घूर्ण भी इस आरोपित T घूर्ण के बराबर होना चाहिए।

ITI Question Bank.com



चित्र (ii)

माना शाफ्ट का व्यास $= D$, तथा इसके अन्दर x त्रिज्या की एक ring जिसकी मोटाई dx है तथा जिस पर कर्तन प्रतिबल τ_x उत्पन्न हो रहा है। तब इस पटट्टी पर कुल कर्तन बल F

F = कर्तन प्रतिबल × पटट्टी का क्षेत्रफल

$$F = \tau_x \times (2\pi x)\, dx$$

∴ कर्तन घूर्ण = कर्तन बल × x

$$\therefore \quad dT = \tau_x \times (2\pi x)\, dx.x$$

$$dT = 2\pi x^2.\tau_x.dx$$

समाकलन करने पर

$$\int dT = \int_0^R \tau_x.2\pi x^2 dx$$

$$\int dT = 2\pi \int_0^R \tau_x.x^2 dx$$

$$\int dT = 2\pi \int_0^R \frac{\tau.x}{R}.x^2 dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \therefore \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{\tau_x}{x} \\ \because T_x = \dfrac{\tau.x}{R} \end{array} \right\}$$

$$T = 2\pi \times \frac{\tau}{R} \int_0^R x^3 dx$$

$$T = 2\pi \frac{\tau}{R}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R$$

$$T = 2\pi \times \frac{\tau}{R} \times \frac{R^4}{4}$$

$$T = \frac{2\pi\,\tau\, R^3}{4} = \frac{\tau\pi\, R^3}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \dfrac{D}{2} \\ R^3 = \dfrac{D^3}{\theta} \end{array} \right\}$$

$$T = \frac{\tau\pi\, D^3}{16}$$

Polar moment Inertia (पोलर जड़त्व आघूर्ण)

$$J = \frac{\pi}{32} D^4 = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$T = \frac{\tau}{R} \times \frac{\pi R^4}{2}$$

$$T = \frac{\tau}{R} \times J$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l}}$$

यही समी० मरोड़ समीकरण है।

ITI Question Bank.com