धरनों का ढलान तथा विक्षेप
(Slope and Deflection of Beam)

प्रश्न 1. धरन के लिये विक्षेप तथा ढलान को परिभाषित कीजिए।

उत्तर: विक्षेप: धरन के किसी बिन्दु की आरम्भिक स्थिति तथा उसी बिन्दु की भार लगाने के बाद अन्तिम स्थिति में, उर्ध्वाधर दूरी के अन्तर को, धरन के उस बिन्दु पर विक्षेप (Deflection) कहते हैं।

ढलान: जब धरन में विक्षेप होता है, तो विक्षेप बिन्दु पर स्पर्शी (Tangent) खींचने पर, मूल अक्ष से इसका बना कोण ढलान कहलाता है।

प्रश्न 2. प्रवणता एवं विक्षेप की आघूर्ण क्षेत्रफल प्रमेय पर टिप्पणी लिखो। (2008, 09)

उत्तर: प्रवणता एवं विक्षेप की आघूर्ण क्षेत्रफल प्रमेय: किसी भारित धरन के अधिकतम ढलान का मान घूर्ण क्षेत्रफल विधि द्वारा उस नमन आघूर्ण आरेख के क्षेत्रफल तथा EI के अनुपात के बराबर होता है।

$$\boxed{\theta = \frac{A}{EI}}$$

भारित धरन के अधिकतम् विक्षेप का मान घूर्ण क्षेत्रफल विधि द्वारा उस नमन आघूर्ण आरेख के क्षेत्रफल तथा EI क्षेत्रफल के गुरुत्व केन्द्र की क्षैतिज दूरी (Horizontal Distance) $\bar{x}$ के गुणनफल एवं EI के अनुपात के बराबर होता है।

$$\boxed{y = \frac{A\bar{x}}{EI}}$$

प्रश्न 3. एक 3 मीटर लम्बे कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे पर विस्थापन ज्ञात कीजिए। जिस पर 10 kN/m का समवितरित भार आबद्ध सिरे से 2 मी० लम्बाई तक लगा है। I का मान 10^8 mm^4 और E का मान 2×10^5 N/mm^2 लीजिए। (2002)

उत्तर: दिया गया है,

$$w = 10 \text{ N/mm}$$

$$l = 3\text{m} = 3000 \text{ mm}$$

भारित स्पान की ल० $= a = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$

$$I = 10^8 \text{ mm}^4$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

बिन्दु B (स्वतन्त्र सिरे) पर विस्थापन

$$y_B = y_C + (l - a) \cdot \theta_C$$

$$= \frac{wa^4}{8EI} + (l - a) \cdot \frac{wa^3}{6EI}$$

$$y_B = \frac{10 \times (2000)^4}{8 \times 10^8 \times 2 \times 10^5} + (3000 - 2000) \times \frac{10 \times (2000)^3}{12 \times 10^{13}}$$

$$y_B = \frac{16 \times 10^{13}}{16 \times 10^3} + \frac{1000 \times 10 \times 8 \times 10^9}{12 \times 10^{13}}$$

$$= 1 + \frac{8 \times 10^{13}}{12 \times 10^{13}} = 1 + \frac{8}{12}$$

$$y_B = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1.66 \text{ mm}$$

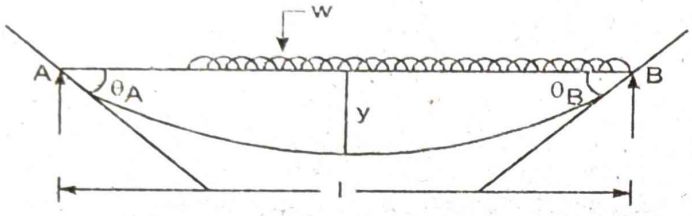
$$\boxed{y_B = 1.66 \text{ mm}}$$ **Ans.**

प्रश्न 4. 100 mm चौड़े तथा 200 mm गहरे आयताकार परिच्छेद वाली 2 m लम्बी शुद्धावलम्बी धरन की पूरी लम्बाई पर 20 kN/m का भार लगा है। धरन के टेकों

ITQuestionBank.com

पर प्रवणता तथा उसके मध्य बिन्दु पर विक्षेप ज्ञात कीजिए। **E = 100 GN/m²।**

उत्तर: दिया गया है,



$$b = 100\text{ mm}$$
$$h = 200\text{ mm}$$
$$l = 2000\text{ mm}$$
$$w = 20\text{ N/mm}$$
$$E = 10^5\text{ N/mm}^2$$

जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{bh^3}{12}$

$$= \frac{100 \times (200)^3}{12}$$

$$I = \frac{2}{3} \times 10^8\text{ mm}^4$$

धरन के टेकों पर प्रवणता θ_A और θ_B है।

$$\theta_A = \theta_B = \frac{wl^3}{24\,EI} = \frac{20 \times (2000)^3}{24 \times 10^5 \times \frac{2}{5} \times 10^8}$$

$$= \frac{16 \times 10^{10}}{16 \times 10^{13}} = 10^{-3}\text{ रेडियन}$$

$$\boxed{\theta_A = \theta_B = 10^{-3}\text{ रेडियन}}$$

मध्य बिन्दु पर अधिकतम विक्षेप (y)

$$y = \frac{5}{384} \times \frac{wl^4}{EI}$$

$$= \frac{5 \times 20 \times (2000)^4}{384 \times 10^5 \times \frac{2}{5} \times 10^8}$$

$$y = \frac{16 \times 10^{14}}{256 \times 10^{13}} = \frac{10}{16}\text{ mm}$$

$$\boxed{y = 0.62\text{ mm}}$$

प्रश्न 5. जब एक समान व्यास वाली 3 m लम्बाई की छड़ को 2 m के विस्तार की सरल आधार की धरन के रूप में प्रयोग किया जाता है तथा विस्तार के मध्य बिन्दु पर 200 N का संकेन्द्री भार लगाने पर m का विक्षेप प्राप्त होता है। यदि इस छड़ को स के रूप में प्रयोग किया जाये। जिसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार हो तब ऑयलर व्यांकुचन भार का मान ज्ञात कीजिए। (2004)

उत्तर: दिया गया है,

केन्द्रीय भार $w = 200$ N

केन्द्रीय विस्थापन $\delta l = 5$ mm

विस्तार की लम्बाई = 2000 mm

We know that,

शुद्धालम्बित धरन के मध्य बिन्दु पर लगे केन्द्रित भार के कारण उत्पन्न विस्थापन,

$$\delta l = \frac{1}{48} \times \frac{wl^3}{EI}$$

$$\delta l \times 48 = \frac{wl^3}{EI}$$

$$EI = \frac{wl^3}{48\,\delta l} = \frac{200 \times (2000)^3}{48 \times 5}$$

$$EI = \frac{1.6 \times 10^{12}}{48 \times 5} = \frac{16 \times 10^{11}}{240}$$

$$EI = 0.066 \times 10^{11}\text{ N-mm}^2$$

ऑयलर व्यांकुचन भार

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$$

एक सिरा (Fix) बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार कॉलम की समतुल्य लम्बाई

$$l_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \, , l_e = \frac{3000}{\sqrt{2}}$$

$$P_e = \frac{2 \times \pi^2 \times 0.066 \times 10^{11}}{9 \times 10^6}$$

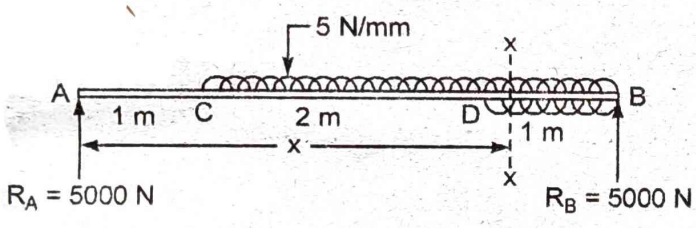
$$= 0.144 \times 10^5 = 14.4 \times 10^2$$

$$\boxed{P_e = 14.4 \times 10^2 \text{ N}}$$ **Ans.**

प्रश्न 6. एक सरल आधारित धरन जिसका परिच्छेद वृत्ताकार है तथा परिच्छेद का व्यास 125 mm की एवं उसके पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक 210 GPa है एवं 4 m की विस्तति पर आधारित है। धरन के मध्य वाले 2 m लम्बाई पर 5 kN/m की तीव्रता का एक समान वितरित भार लगाया गया है। सूत्र $EI \times \frac{d^2}{dx^2} = Mx$ का प्रयोग करते हुए धरन में उत्पन्न अधिकतम विक्षेप का मान तथा उसकी अवस्थिति ज्ञात कीजिए।

(2005)

उत्तर: दिया गया है,



धरन का व्यास $d = 125$ mm

$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

$w = 5 \text{ N/mm}$

धरन की काट का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} \times (125)^4$$

$$I = \frac{\pi}{64} \times 125 \times 125 \times 125 \times 125$$

$$I = 11984224.91 \text{ mm}^4$$

∵ शुद्धालम्बित धरन, मध्य बिन्दु के दांयी और बांयी ओर समान रूप से भारित धरन है।

$\therefore \quad R_A = R_B$

$R_A = 5000$ N तो $R_B = 5000$ N होगा।

Bending Moment,

$$BM_{xx} = 5000 \times - \left[\frac{5x(x-1000)^2}{2} \right] + \frac{5(x-3000)^2}{2}$$

मैकाले के सूत्र से,

$$EIx \frac{d^2y}{d^2x} = M_x = BM_{xx} = 5000x - [2.5(x-1000)^2] + 2.5(x-3000)^2$$

समाकलन करने पर,

$$EIx \frac{dy}{dx} = \frac{5000\,x^2}{2} - \left[\frac{2.5}{3}(x-1000)^3 \right] + \frac{2.5}{3}(x-3000)^3 + C_1$$

Again Integration

$$EIxy = \frac{5000\,x^3}{6} - \left[\frac{2.5}{12}(x-1000)^4 \right] + \frac{2.5}{12}(x-3000)^4 + C_1 x + C_2$$

$$EIxy = \frac{5000}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - C_1 x + C_2 - \left[\frac{2.5}{3}(x-1000)^4 \right] + \frac{2.5}{12}(x-3000)^4$$

End A पर, $x = 0, y = 0$ $EIxy$ में रखने पर

$$C_2 = 0$$

तथा B End पर $x = 4000$ और $y = 0$ रखने पर

$$0 = 2500 \times \frac{(4000)^3}{3} + 4000 C_1 + 0 - \left[\frac{2.5}{12} \times (3000)^4 \right] + \frac{2.5}{12}(1000)^4$$

$$0 = 3.66 \times 10^{13} + 4000\,C_1$$

$$4000\,C_1 = -3.66 \times 10^{13}$$

$$\boxed{C_1 = -9.167 \times 10^9}$$

अत:

$$EIx\frac{dy}{dx} = 2500x^2 - 9.167\times10^9 - \left[\frac{2.5}{3}(x-1000)^3\right] + \left[\frac{2.5}{3}(x-3000)^3\right]$$

$$EIxy = 2500\frac{x^3}{3} - 9.167\times10^9 - \left[\frac{2.5}{12}(x-1000)^4\right] + \frac{2.5}{12}(x-3000)^4$$

Beam में अधिकतम विक्षेप CD भाग में प्राप्त होगा।

$\frac{dy}{dx} = 0$ होगा। अत: उपरोक्त समीकरण से,

$$0 = 2500x^2 - 9.167\times10^9 - \left[\frac{2.5}{3}(x-1000)^3\right]$$

Trial and Error विधि (Method) से हल करने पर

$$EIy_{max} = \frac{2500}{3}x^3 - 9.167\times10^9 x - \left[\frac{2.5}{12}(x-1000)^4\right]$$

$x = 2000$ रखने पर

$$EIy_{max} = \frac{2500}{3}\times(2000)^3 - 9.167\times10^9\times2000 - \left[\frac{2.5}{12}(2000-1000)^4\right]$$

$$EIy_{max} = -1.188 - 10^{13}$$

$$y_{max} = \frac{-1.188\times10^{13}}{E\times I} = \frac{-1.188\times10^{13}}{2.1\times10^5\times11984225}$$

$$\boxed{y_{max} = -4.72 \text{ mm}}$$ **Ans.**

(धरन में विस्थापन नीचे की ओर होगा।)