

पतले बेलनाकार एवं गोलीय खोल (Thin Cylindrical and Spherical Shell)

प्रश्न 1. पतले तथा मोटे खोल के बीच अन्तर स्पष्ट कीजिये।

उत्तर: पतले खोल (Thin Shells): यदि खोल की अनुप्रस्थ मापों की तुलना में दीवार की मोटाई बहुत कम है तो इन प्रतिबलों का दीवार की पूर्ण मोटाई पर वितरण एक समान माना जा सकता है और ऐसे खोलों को पतले खोल कहते हैं।

साधारणतया जिन खोलों की दीवार की मोटाई उसके व्यास के लगभग $\frac{1}{10}$ गुना से कम होती है, उन्हें पतले खोल कहते हैं।

मोटे खोल (Thick Shells): जिनकी दीवार की मोटाई उनके व्यास के लगभग $\frac{1}{10}$ गुना से अधिक होती है, उन्हें मोटे खोल कहते हैं।

प्रश्न 2. निम्न को परिभाषित कीजिये।

(i) परिधीय प्रतिबल

(ii) अनुदैर्घ्य प्रतिबल

(iii) पतले खोल

उत्तर: (i) परिधीय प्रतिबल (Circumferential Stress): खोल में आन्तरिक दाब के कारण परिधीय प्रतिबलों की प्रकृति तनाव तथा बाह्य दाब के कारण सम्पीड़न वाली होती है। जब परिधीय प्रतिबल का मान खोल के पदार्थ के अन्तिम प्रतिबल के बराबर हो जाता है तब खोल फट जाता है। परिधीय प्रतिबलों को हूप प्रतिबल भी कहते हैं।

$$\text{परिधीय प्रतिबल } (f_y) = \frac{pd}{2t}$$

जहाँ p = खोल के अन्दर दाब

d = खोल का व्यास

t = खोल की दीवार की मोटाई

(ii) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stress): जब बेलन को फाड़ने वाला दाब उसकी लम्बाई की दिशा में लगता है तो इसी दिशा में खोल की दीवार में भी प्रतिबल पैदा होते हैं, जिन्हें अनुदैर्घ्य प्रतिबल कहते हैं। इनके कारण बेलन की लम्बाई बढ़ जाती है। अनुदैर्घ्य प्रतिबल तनाव की प्रकृति के होंगे। इसके विपरीत बाहर से दाब लगने पर ये प्रतिबल सम्पीड़न वाले होंगे।

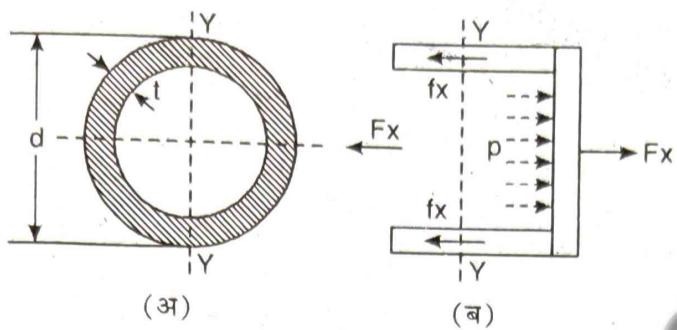
$$\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल } (f_z) = \frac{pd}{4t}$$

(iii) पतले खोल (Thin Shell): जिन खोलों की दीवार की मोटाई उनके व्यास के लगभग $\frac{1}{10}$ गुना से कम होती है। उन्हें पतले खोल कहते हैं।

प्रश्न 3. पतले बेलनाकार खोल में प्रतिबल की अवधारणा को विस्तारपूर्वक समझाइये।

उत्तर: पतले बेलनाकार खोल में प्रतिबल (Stresses in Thin Cylindrical Shell): हम जान चुके हैं कि दाब के कारण बेलनाकार खोल में दो प्रकार के परस्पर लम्ब दिशाओं में प्रतिबल उपजते हैं। अब हम इन दोनों प्रतिबलों के मान ज्ञात करेंगे।

(अ) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stresses): हम पहले ज्ञात कर चुके हैं कि बेलनाकार खोल के सिरों (ends) पर लगने वाले दाब के कारण खोल के पदार्थ में प्रतिबल इसकी लम्बाई की अक्ष की दिशा में पैदा होता है (क्योंकि सिरे खोल से जुड़े हैं)। सन्तुलन की अवस्था में दाब के कारण कुल बल तथा प्रतिबल के कारण बल बराबर होने चाहिये।



चित्र: 1 (अ, ब)

माना कि खोल की दीवार की मोटाई t तथा व्यास d है और खोल में अनुदैर्घ्य प्रतिबल (longitudinal stress) f_x पैदा होता है। क्योंकि दाब p सिरे (end) पर लगता है, इसलिए इसके कारण सिरे को दायीं ओर धकेलने वाला बल (चित्र 1 (ब) के अनुसार),

$$F_x = p \times \text{सिरे का क्षेत्रफल} = p \times \frac{\pi}{4} d^2 \quad \dots(1)$$

परन्तु सिरा खोल से जुड़ा हुआ है इसलिये सन्तुलन की अवस्था में खोल में पैदा हुआ प्रतिबल f_x के कारण बायीं ओर कुल बल भी F_x ही होना चाहिये।

$$F_x = f_x \times \text{खोल की काट का क्षेत्रफल} \quad (\text{किसी भी काट } Y-Y \text{ पर})$$

$$= f_x \times \pi \times d \times t \quad \dots(2)$$

(चित्र 1 (अ) के अनुसार)

$$\text{अतः } f_x \times \pi \times d \times t = p \times \frac{\pi}{4} d^2$$

इसलिये खोल में अनुदैर्घ्य प्रतिबल,

$$f_x = \frac{pd}{4t}$$

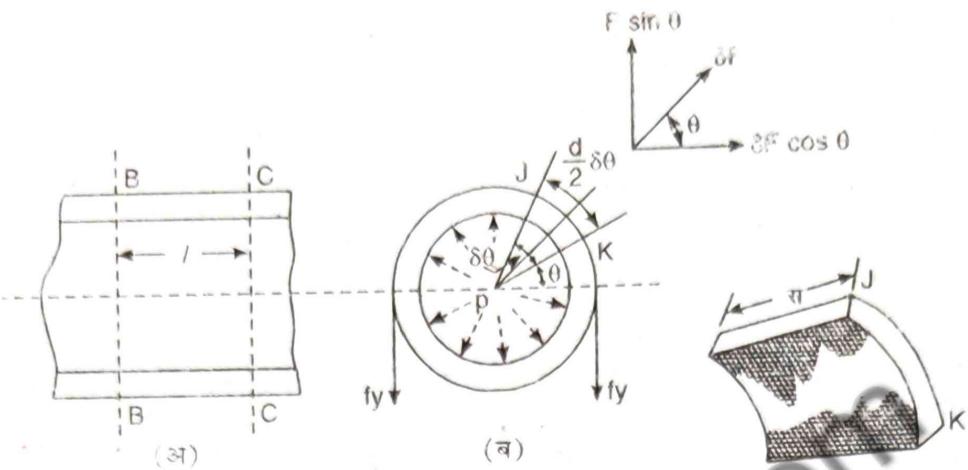
...(3)

(ब) घरिथीय प्रतिबल (Circumferential or Hoop Stresses): चित्र 2(अ) में हम बेलनाकार खोल की B - B तथा C - C काटों के बीच लम्बाई l के सन्तुलन के बारे में विचार करेंगे। चित्र 2(ब) में काट के क्षेत्रिज से ऊपरी भाग पर विचार कीजिये। इस भाग में $\angle \theta$ पर किसी त्रिज्या से $\delta\theta$ कोण के बीच खोल की l लम्बाई का भाग मानिये। इस भाग की चौड़ाई $JK = \frac{d}{2} \times \delta\theta$

$$\text{अतः क्षेत्रफल} = JK \times l = \frac{d}{2} \times \delta\theta \times l \quad \text{छायादार क्षेत्र}$$

इस क्षेत्रफल पर दाब p लगता है। अतः इस भाग पर कुल बल,

$$\delta F = p \times \frac{d}{2} \times \delta\theta \times l$$



चित्र 2(अ, ब)

यह बल JK के लम्बरूप लगता है और चित्र 2 (ब) में दिखाया गया है। क्योंकि कोण $\delta\theta$ बहुत छोटा है इसलिये δF का भी क्षैतिज से झुकाव θ ही माना जा सकता है।

इस बल का झुकाव घटक (Horizontal component) = $\delta F \cos \theta$

तथा ऊर्ध्व घटक (Vertical component) = $\delta F \sin \theta$

अब क्षैतिज व्यास से काट के ऊपरी भाग में $\delta F \sin \theta$ जैसे घटकों का जोड़,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \delta F \sin \theta = \int_0^\pi p \times \frac{d}{2} \times l \sin \theta \cdot d\theta \\
 &= p \cdot \frac{d}{2} \times l [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{pd}{2} \times l [-\{(-1)\}] \\
 &= \frac{pd}{2} \times l \times 2 = pdl
 \end{aligned} \tag{4}$$

फिर क्षैतिज व्यास से काट के ऊपरी भाग पर $\delta F \cos \theta$ जैसे घटकों का जोड़

$$= \int_0^\pi \delta F \cos \theta = \int_0^\pi p \times \frac{d}{2} \times l \cos \theta \cdot d\theta = \frac{pd}{2} \times l [\sin \theta]_0^\pi = 0$$

इन प्रकार हम देखते हैं कि दाब p के कारण क्षैतिज व्यास से ऊपरी भाग में एक बल, ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर लगता है जो कि इसी व्यास पर खोल को फ़ाड़ने का प्रयत्न करता है। परन्तु खोल, व्यास पर निचले भाग से जुड़ा है। इसलिये माना कि इसमें f_y प्रतिबल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर पैदा होता है, चित्र 2(ब) के अनुसार अब f_y प्रतिबल के कारण नीचे की ओर कुल बल

खोल की काट का क्षेत्रफल व्यास पर क्षेत्रफल = $f_y \times 2 \times (t \times l)$

जहाँ t = खोल की दीवार की मोटाई

फिर मनुष्य के लिये (4) तथा (5) के बल बराबर होने चाहिये।

$$f_y \times 2 \times l \times t = p \times d \times l$$

परिधीय प्रतिबल (Circumferential stress)

$$f_y = \frac{pd}{2t} \quad \dots(6)$$

इस प्रकार सम्बन्ध (3) तथा (6) की सहायता से हम कह सकते हैं कि पतले बेलनाकार खोल में परिधीय प्रतिबल (circumferential stress) f_y अनुदैर्घ्य प्रतिबल (longitudinal stress) f_x का दुगुना होता है।

प्रश्न 4. गोलीय खोल में उत्पन्न होने वाले प्रतिबलों को स्पष्ट कीजिये।

उत्तर: गोलीय खोल (Spherical Shell) में प्रतिबल: माना कि गोलीय खोल का व्यास d तथा खोल की दीवार की मोटाई t है। इस खोल के अन्दर p दाब पर कोई गैस भरी है। यह खोल किसी व्यास $X-X$ पर फटने की प्रवृत्ति (tendency) रखता है। चित्र में खोल के $X-X$ के ऊपरी भाग के सन्तुलन (equilibrium) पर विचार कीजिये।

p दाब के कारण इस भाग में ऊर्ध्वाधर (vertically upward) बल

$$P = p \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \quad \dots(1)$$

यह बल खोल को $X-X$ काट पर फाड़ने का प्रयत्न करता है। इस बल के विरोध में यदि खोल की दीवार में f प्रतिबल पैदा होता है, तब इस प्रतिबल के कारण $X-X$ काट पर नीचे की ओर कुल विरोधी बल।

$F = f \times X-X$ पर काट का क्षेत्रफल

अब हम जानते हैं कि किसी गोल की काट वृत्तकार होती है।

अतः $X-X$ पर काट का क्षेत्रफल = $\pi \times d \times t$

$$F = f \times \pi d \times t \quad \dots(2)$$

अब सन्तुलन की अवस्था में

$$\pi d \cdot t = p \times \frac{\pi}{4} \times d^2$$

अतः खोल में प्रतिबल

$$f = \frac{p \times d}{4t}$$

प्रश्न 5. बेलनाकार खोलों में उत्पन्न होने वाली विकृतियों को सुस्पष्ट विस्तार में समझाइये।

उत्तर (1) बेलनाकार खोल (Cylindrical Shell): माना कि किसी खोल की लम्बाई = l , व्यास = d

दीवार की मोटाई = t , तथा खोल के अन्दर दाब = p

खोल की दीवार में अनुदैर्घ्य प्रतिबल (longitudinal stress),

$$f_x = \frac{pd}{4t}$$

तथा खोल की दीवार में परिधीय प्रतिबल (circumferential stress or hoop stress),

$$f_y = \frac{pd}{2t}$$

फिर माना कि खोल के पदार्थ के लिये, $1/m$ पॉइजन अनुपात (Poisson ratio)

E = यंग मापांक (Young's modulus)

अब हम कह सकते हैं कि खोल में अनुदैर्घ्य विकृति (longitudinal strain);

$$e_x = \frac{f_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{f_y}{E}$$

$$= \frac{1}{E} \left[f_x - \frac{f_y}{m} \right]$$

f_x तथा f_y के मान रखने पर,

$$e_x = \frac{1}{E} \left[\frac{pd}{4t} - \frac{pd}{m \times 2t} \right]$$

$$e_x = \frac{pd}{2tE} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right] \quad \dots(1)$$

इसी प्रकार परिधीय विकृति (circumferential strain):

$$e_y = \frac{f_y}{E} - \frac{f_x}{mE}$$

$$e_y = \frac{pd}{2tE} \left[1 - \frac{1}{2m} \right] \quad \dots(2)$$

अब खोल की आयतन विकृति (volume strain):

$$e_v = e_x + e_y + e_z \text{ परन्तु } e_z = e_y$$

$$e_v = e_x + 2e_y$$

$$e_v = \frac{pd}{2tE} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right) + 2 \times \frac{pd}{2tE} \left(1 - \frac{1}{2m} \right)$$

$$\text{या } e_v = \frac{pd}{2tE} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m} + 2 - \frac{1}{m} \right]$$

अतः आयतन विकृति,

$$e_v = \frac{pd}{2tE} \left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m} \right] \quad \dots(3)$$

अतः p दाब से खोल के आयतन में परिवर्तन,

$\delta V =$ प्रारम्भिक आयतन \times आयतन विकृति

$$= V \times e_v$$

$$\delta V = V \times \frac{pd}{2tE} \left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m} \right] \quad \dots(4)$$

अब खोल की लम्बाई में परिवर्तन,

$$\delta l = l \times \text{अनुदैर्घ्य विकृति}$$

$$= l \times e_x$$

$$\therefore \delta l = l \times \frac{pd}{2tE} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right) \quad \dots(5)$$

खोल के व्यास में परिवर्तन,

$$\delta d = d \times \text{परिधीय विकृति}$$

$$\text{व्यासीय विकृति} = \frac{\delta d}{d} = \text{परिधीय विकृति} = \frac{\pi \delta d}{\pi d}$$

$$\therefore \delta d = d \times e_y$$

$$\therefore \delta d = d \times \frac{pd}{2tE} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \quad \dots(6)$$

प्रश्न 6. गोलीय खोल में उत्पन्न होने वाली विकृतियों को स्पष्ट कीजिये।

उत्तर: माना कि गोलीय खोल का

व्यास = d दीवार की मोटाई = t , पॉइज़न अनुपात = $1/m$,

यंग मापांक = E , भीतरी दाब = p

तब खोल में परिधीय प्रतिबल,

$f = \frac{pd}{4t}$ खोल की प्रत्येक दिशा में यही प्रतिबल होगा

\therefore खोल में परिधीय विकृति (circumferential stress),

$$\begin{aligned} e &= \frac{f}{E} - \frac{f}{mE} \\ &= \frac{f}{E} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{pd}{4t\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{m} \right] \end{aligned} \quad \dots(7)$$

अब खोल की आयतन विकृति,

$$\begin{aligned} e_v &= 3e \\ &= \frac{3f}{E} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{3 \times pd}{4tE} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad \dots(8)$$

अतः खोल के आयतन में परिवर्तन,

$$\delta V = V \times e_v \quad \dots(9)$$

अब खोल के व्यास में परिवर्तन,

$$\begin{aligned} \delta d &= d \times e \\ &= d \times \frac{f}{E} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \\ &= d \times \frac{pd}{4tE} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{pd^2}{4tE} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad \dots(10)$$

प्रश्न 7. किसी पाइप का व्यास 50 cm तथा दीवार की मोटाई 2 cm है। यदि पाइप के अन्दर पानी का दाब 0.4 N/mm^2 हो तो पाइप में प्रतिबलों के मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर: $p = 0.4 \text{ N/mm}^2$, $d = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}$ तथा $t = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$

पाइप में अनुदैर्घ्य प्रतिबल (longitudinal stress),

$$f_x = \frac{pd}{4t} = \frac{0.4 \times 500}{4 \times 20} = 2.5 \text{ N/mm}^2$$

पाइप में परिधीय प्रतिबल (circumferential stress),

$$f_y = \frac{pd}{2t} = \frac{0.4 \times 500}{4 \times 20} = 5 \text{ N/mm}^2$$

प्रश्न 8. 2.5 m लंबे एक बेलनाकार पात्र का व्यास 100 cm है तथा दीवार की मोटाई 1 cm है। अगर आन्तरिक दाब 1.6 N/mm² है तो अधिकतम प्रतिबल तथा आयतन में परिवर्तन ज्ञात करें।

उत्तर: हम जानते हैं कि बेलनाकार पात्र में अधिकतम प्रतिबल परिधीय होता है।

∴ पात्र में अधिकतम प्रतिबल,

$$f_y = \frac{pd}{2t} = \frac{1.6 \times 1000}{2 \times 10} = 80 \text{ N/mm}^2$$

अब अनुच्छेद 10.6 के सूत्र (4) से

$$\text{पात्र के आयतन में परिवर्तन}, \delta V = V \times \frac{pd}{2tE} \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{m} \right)$$

माना कि पात्र के लिये $\frac{1}{m} =$ तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

तब पात्र के आयतन में परिवर्तन,

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{\pi}{4} \times d^2 \times l \times \frac{pd}{2tE} \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{m} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{1000^2 \times 2500 \times 1.6 \times 1000}{2 \times 10 \times 2 \times 10^5} \left(\frac{5}{2} - 2 \times 0.3 \right) \\ &= 1492.2 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

प्रश्न 9. 8 mm मोटी इस्पात की चादर (sheet) से बने 1 m के भीतरी व्यास वृत्ताकार नल में कितने अधिकतम आन्तरिक दाब पर कोई द्रव बह सकता है? इस्पात के लिये परिमेय तनाव प्रतिबल = 150 N/mm²

उत्तर: हम जानते हैं कि अधिकतम दाब के लिये प्रतिबल भी अधिकतम होगा। क्योंकि बेलनाकार पात्र में

अधिकतम प्रतिबल परिधीय होता है इसलिये $f_y = \frac{pd}{2t}$ सूत्र का प्रयोग करता चाहिये।

$$\begin{aligned} \therefore \text{अधिकतम दाब } p &= \frac{f_y \times 2t}{d} \\ &= \frac{150 \times 2 \times 8}{1000} = 2.4 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 10. एक नल जिसका व्यास 50 cm है, जल से भरा है। जल दाबी ऊँचाई 100 m है। नल की मोटाई ज्ञात करें जब नलिका द्रव (material) का अनुज्ञेय (permissible) प्रतिबल 100 N/mm² है।

उत्तर: द्रव इंजीनियरी (hydraulics) द्वारा हम जानते हैं कि $h m$ जल दाबी ऊँचाई (head of water) होने पर जल दाब (pressure of water)

$$p = w \times h \text{ जहाँ } w = \text{जल के इकाई आयतन का भार माना कि } w = 10 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{नल में पानी का दाब}, p &= 10 \times 10^3 \times 100 \\ &= 1 \times 10^6 \text{ N/m} = 1 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

अब सिलिण्डर में परिधीय प्रतिबल अधिकतम होता है।

$$\therefore f_y = \frac{pd}{2t} = 100$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{नल की मोटाई}, t &= \frac{pd}{2 \times 100} = \frac{1 \times 500}{2 \times 100} \\ &= 2.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

प्रश्न 11. 1.2 m व्यास का बेलनाकार खोल 20 mm मोटी प्लेटों से बना है। इसमें 4 N/mm² का दाब लगा है। इसके अनुदैर्घ्य (longitudinal) जोड़ में प्रतिबल निकालिये यदि इस जोड़ की दक्षता 75% है। प्रयुक्त सूत्र को व्युत्पन्न करें।

उत्तर: अनुदैर्घ्य जोड़ पर परिधीय प्रतिबल कार्य करेगा, अतः इस दशा में निम्न सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$f_y = \frac{pd}{2t\eta_l}$$

यहाँ, $p = 4 \text{ N/mm}^2$, $d = 1.5 \text{ m} = 1200 \text{ mm}$, $t = 20 \text{ mm}$

तथा $\eta_r = 75\% = 0.75$

$$\therefore \text{अनुदैर्ध्य जोड़ में प्रतिबल}, f'_y = \frac{4 \times 1200}{2 \times 20 \times 0.75} = 160 \text{ N/mm}^2$$

प्रश्न 12. एक पतले गोलीय खोल का व्यास 1 m है तथा यह इस्पात की 8mm मोटी प्लेटों से बना है। इसमें गैस का आन्तरिक दाब 2.5 N/mm^2 है तथा प्लेट जोड़ों की दक्षता 75% है। यदि $m = 4$ तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ तो खोल प्लेट में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान तथा खोल के व्यास में परिवर्तन ज्ञात कीजिये।

उत्तर: खोल प्लेट में अधिकतम प्रतिबल जोड़ पर उपजेगा जिसका मान,

$$f' = \frac{dp}{2t\eta} = \frac{2.5 \times 1000}{4 \times 8 \times 0.75}$$

$$f' = 104.167 \text{ N/mm}^2.$$

ITI Question Bank.com

$$\text{खोल के व्यास में परिवर्तन}, \delta d = \frac{pd^2}{2tE} \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

$$= \frac{2.5 \times 1000^2}{4 \times 8 \times 2 \times 10^5} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ = 0.293 \text{ mm}$$

$$\therefore \delta d = 0.293 \text{ mm}$$