मशीनों की गतिकी
(Dynamics of Machines)

प्रश्न 1. निम्नलिखित पर टिप्पणी लिखिए।

1. डी-एलम्बर्ट सिद्धांत

2. जड़त्व बल युग्म

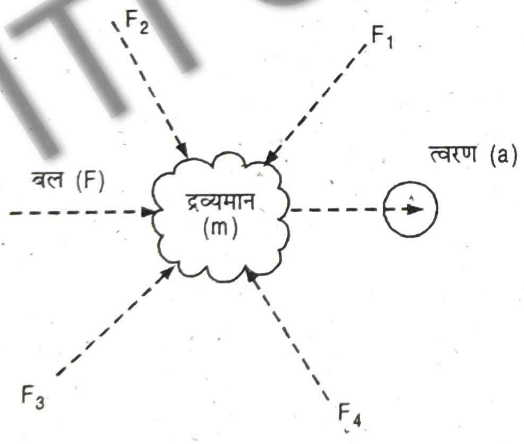
3. जड़त्व बल **[2000]**

उत्तर– 1. डी-एलम्बर्ट सिद्धांत (D- Alembert Principle)– चित्र (1) के अनुसार M द्रव्यमान के एक पिण्ड पर बलों F_1, F_2, F_3 तथा F_4 से बना एक बल निकाय कार्यरत है। इस बल निकाय का परिणामी बल माना F है जो पिण्ड में a मान का रेखीय त्वरण उत्पन्न करता है। अब न्यूटन के गति के दूसरे नियम से

$$\boxed{F = ma} \quad \dots (1)$$

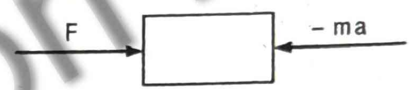
इस समीकरण (1) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$F - ma = 0$$



चित्र 1.

यहाँ $-ma$ को एक बल, जो मान में बराबर दिशा में विपरीत तथा परिणामी बल की क्रिया रेखा में कार्यरत माना जा सकता है। ये दोनों बल मिलकर निकाय का संतुलन बनाते है। (चित्र 2) इस सिद्धांत को डी एलम्बर्ट का सिद्धांत कहते हैं। इसके बराबर तथा विपरीत बल $-ma$ को जड़त्व बल कहते हैं।



चित्र 2.

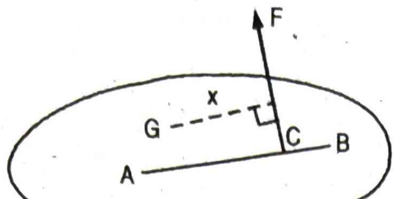
इस प्रकार डी-एलम्बर्ट के अनुसार, ''पिण्ड पर लगने वाला परिणामी बल, जड़त्व बल के साथ मिलकर पिण्ड को संतुलन में रखता है।''

यह सिद्धांत एक गतिक समस्या को समान स्थैतिक समस्या में बदलने के लिए प्रयोग किया जाता हैं।

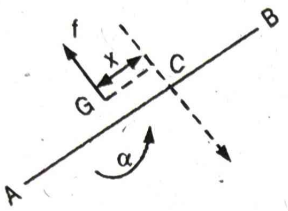
2. जड़त्व बल युग्म– यदि बल निकाय के अतिरिक्त पिण्ड पर कोणीय त्वरण α कार्य करता है तो पूर्ण संतुलन हेतु पिण्ड पर जड़त्व बल के साथ-साथ एक जड़त्व बलयुग्म भी कार्य करेगा जिसका घूर्ण पिण्ड पर लगाये गये बलयुग्म के घूर्ण के बराबर परंतु दिशा विपरीत होगी। जब पिण्ड पर बल निकाय का परिणामी अथवा प्रभावी बल F पिण्ड के गुरुत्व केंद्र G से गुजरता है तो इसके कारण पिण्ड पर कोई बलयुग्म कार्य नहीं करता है।

चित्र के अनुसार जब प्रभावी बल F पिंड के गुरुत्व केंद्र से x दूरी पर क्रिया करता है तब पिण्ड पर एक बलयुग्म भी कार्य करता है जो α कोणीय त्वरण उपजाता है। अतः इस बलयुग्म के संतुलन हेतु जड़त्व बलयुग्म भी कार्य करेगा। इस

दशा में C पर प्रभावी बल F का विरोध जड़त्व बल R द्वारा होगा और R भी C से होकर F की ही क्रिया रेखा पर विपरीत दिशा में कार्य करेगा (चित्र 2 के अनुसार)



चित्र 3.



चित्र 4.

इस भांति C से गुजरते R के कारण भी, G से गुजरता हुआ बल R तथा G पर लम्ब अक्ष के परित: $R \times x$ घूर्ण उपजेंगे।

अत: $F \times x = -R \times x$ ... (i)

या $F \times x + R \times x = 0$ ... (ii)

3. जड़त्व बल– जड़त्व का तात्पर्य स्थिति परिवर्तन के विरोध से है, भले ही यह परिवर्तन विराम की स्थिति अथवा समान गति की स्थिति से हो।

किसी कड़ी अथवा दृढ़ पिण्ड पर यदि कोई बल निकाय क्रिया करता है, जिसका परिणामी F बल है। तब

$$F = m \times a \quad ...(i)$$

$$F - ma = 0 \quad ...(ii)$$

माना कि

$$R = -ma \quad ...(iii)$$

$$F + R = 0 \quad ...(iv)$$

संबंध (2) से पता चलता है कि बलों F तथा $(-mf)$ का परिणामी शून्य है अत: ये दोनों बल परस्पर संतुलन बनाते हैं। इस प्रकार पिण्ड पर बल निकाय के साथ यदि $-mf = R$ बल क्रिया करे तो पिण्ड संतुलन में होगा।

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि पिण्ड पर बल निकाय उस बल R, के साथ संतुलन बनाएगा जिसका मान F के बराबर हो और इसी की क्रिया रेखा (Line of Action) पर विपरीत दिशा में कार्य करे। अत: बल R पिण्ड पर बल निकाय अथवा F का विरोध करता है इसलिए R को 'जड़त्व बल' अथवा विपरीत प्रभावी बल कहते हैं।

प्रश्न 2. यदि क्रैंक एक समान परिमाण से घूर्णन कर रहा हो तब पिस्टन के विस्थापन, वेग तथा त्वरण के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। [2013]

उत्तर– चित्र में दर्शाये गये स्लाइडर क्रैंक यंत्रविन्यास के अनुसार क्रैंक AB के दक्षिणावर्त दिशा में θ कोण घूमने पर पिस्टन DC से दायीं ओर x दूरी (C_1, C) पर विस्थापित हो जायेगा।

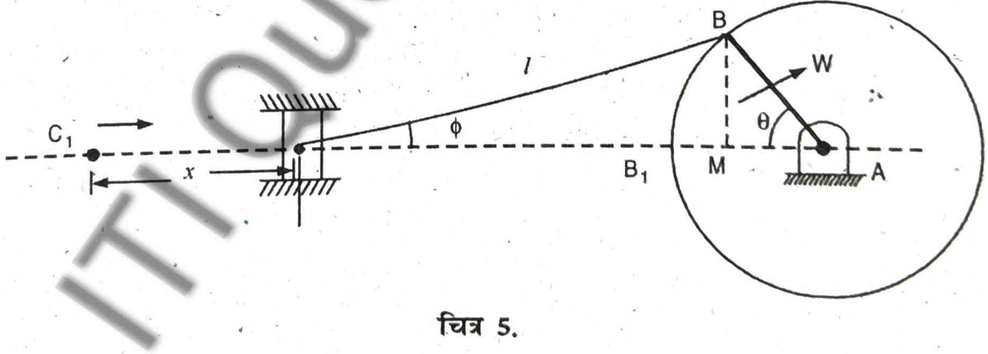
यहाँ AB = क्रैंक की त्रिज्या

BC = संयोजक दण्ड की लंबाई $= l$

$n = l/r$ = अनुपात (3 से 5 के बीच में)

θ = क्रैंक AB का घुमाव कोण

ϕ = संयोजक दण्ड BC का क्षैतिज से झुकाव



चित्र 5.

ΔBMA में $\frac{BM}{AB} = \sin\theta$ से, $BM = r \sin\theta$ तथा $\frac{AM}{AB} = \cos\theta$, $AM = r\cos\theta$

ΔBMC में $\frac{BM}{BC} = \sin\theta$ से, $BM = l\sin\theta$ तथा $CM = l\cos\theta$

$$BM = r\sin\theta = l\sin\theta \text{ से,}$$

$$\sin\theta = \frac{r\sin\theta}{l}$$

$$\frac{\sin\theta}{l/r} = \frac{\sin\theta}{n}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta}{n},$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2-\sin^2\theta}{n^2}}$$

चित्र के अनुसार, पिस्टन का विस्थापन $(x) = C_1 C$

$$\begin{aligned} x &= C_1A - CA \\ &= (C_1B_1 + B_1A) - (CM + MA) \\ x &= (l + r) - (l\cos\phi + r\cos\theta) \\ &= l - l\cos\theta + r - r\cos\theta \\ &= l(1 - \cos\phi) + r(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$x = l\left[1-\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{n}\right] r(1-\cos\theta)$$

$$= l - \frac{1}{n}\times\sqrt{n^2-\sin^2\theta} + r - r\cos\theta$$

$$= l - r\sqrt{n^2-\sin^2\theta} + r - r\cos\theta$$

विस्थापन $(x) = (l + r) - r(\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$

$$x = (nr + r) - r\left[\cos\theta + \sqrt{n^2-\sin^2\theta}\right]$$

पिस्टन का वेग

$$(v) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = w\times r\left[0+\sin\theta - \frac{\frac{1}{2}\times(0-2\sin\theta\cos\theta)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right]$$

$$v = rw\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$

$\because n > \sin\theta \therefore n^2 > \sin^2\theta$

पिस्टन का वेग

$$(v) = rw\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2n}\right)$$

त्वरण के लिए

$$(a) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$$

$$= rw^2\left(\cos\theta + \frac{2\cos 2\theta}{2n}\right)$$

पिस्टन का त्वरण

$$(f) = rw^2\left(\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right)$$

प्रश्न 3. स्थैतिक बल तथा गतिक बल को परिभाषित करते हुए क्रैंक प्रयास आरेख के उपयोग बताइये। **[2006]**

उत्तर– स्थैतिक बल (Static Force)– मशीनों के संदर्भ में (*a*) अंग का भार (*b*) गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला बल तथा (*c*) किसी कटाई मशीन में कटाई के अंतर्गत औजार द्वारा प्रस्तुत किया गया प्रतिरोध आदि स्थैतिक बल माने जाते हैं और परिस्थितियों के अनुसार प्रस्तुत होते हैं।

गतिक बल (Dynamic Force)– गतिक बल, मशीन की गतिमान अवस्था में उसके चल अंगों के जड़त्व के कारण उपजते हैं। ये बल अंगों की संहति तथा गति के कारण प्रेरित होते हैं। गतिक बलों को जड़त्व बल भी कहते हैं।

गतिक बलों का मान कभी-कभी इतना अधिक हो जाता है कि संबंधित मशीनी अंग असफल हो सकता है, जबकि केवल स्थैतिक बलों के प्रभाव में वह अंग सुरक्षित हो। अत: इन बलों का मान सावधानीपूर्वक ज्ञात किया जाना चाहिए।

क्रैंक प्रयास आरेख के उपयोग–

1. इंजन के प्रति चक्र में क्रैंक प्रयास (T) एवं क्रैंक के कोणीय विस्थापन (θ) के आरेख का क्षेत्रफल उसका कार्य प्रति चक्र होगा। इसको गतिपाल पहिए के प्रति मिनट चक्करों की संख्या (N) से गुणा करके तथा 60 से भाग देकर इंजन की शक्ति ज्ञात की जा सकती है।
2. $(T-\theta)$ आरेख के क्षेत्रफल को आधार की लंबाई से भाग देने पर औसत घुमाव घूर्ण (T_m) ज्ञात किया जा सकता है।

3. ($T-\theta$) आरेख से 'T' के अधिकतम मान के लिए क्रैंक शाफ्ट के व्यास की गणना की जा सकती है।

प्रश्न 4. घुमाव घूर्ण आरेख से क्या तात्पर्य है? विभिन्न इंजनों के क्रैंक प्रयास आरेख खींचिए।

उत्तर– घुमाव घूर्ण आरेख (Turning Moment Diagram)– घुमाव घूर्ण आरेख, जिसे क्रैंक प्रयास आरेख भी कहते हैं, क्रैंक की विभिन्न स्थितियों में घुमाव घूर्ण अथवा क्रैंक प्रयास के ग्राफीय निरूपण को कहते हैं।

इस आरेख में क्रैंक कोण को x -अक्ष पर तथा उस स्थिति के क्रैंक प्रयास को y अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं।

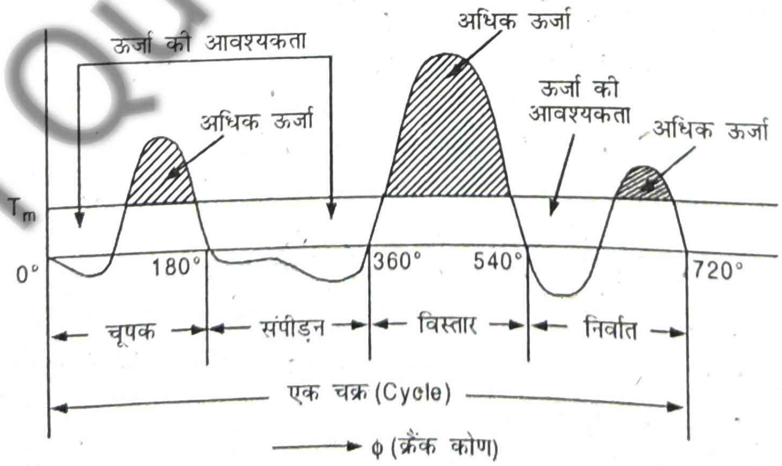
विभिन्न इंजन निम्न प्रकार हैं–

1. एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक इंजन
2. एकल सिलिण्डर द्वि क्रिया भाप इंजन
3. तीन सिलिण्डर भाप इंजन

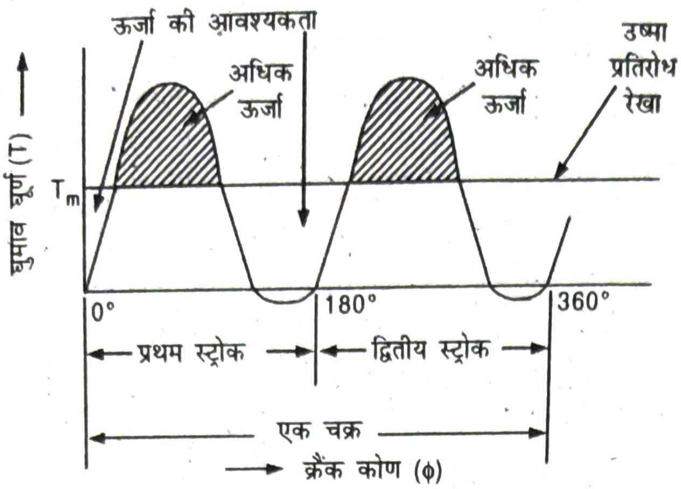
1. **एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक इंजन (Single Cylinder Four Stroke Engine)–** चित्र में इसका घुमाव घूर्ण (Turning Moment) या क्रैंक प्रयास (Crank Effort) आरेख प्रदर्शित किया गया है। हम यह जानते हैं कि इस इंजन के एक चक्र (Cycle) में एक कार्यकारी स्ट्रोक (Working Storke) होगा तथा क्रैंक 720° घूमेगा अर्थात् क्रैंक (Crank) दो चक्कर घूमेगा। इस आरेख में क्रैंक कोण (θ) को क्षैतिज रेखा पर एवं घुमाव घूर्ण (T) को ऊर्ध्वाधर रेखा पर प्रदर्शित किया गया है। चूषण स्ट्रोक में क्योंकि सिलिण्डर के अंदर का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम होता है, इसलिये शुरू में आरेख ऋणात्मक तथा बाद में सिलिण्डर के अंदर का दाब वायुमण्डलीय दाब से अधिक होने के कारण आरेख धनात्मक होगा। संपीड़न स्ट्रोक में गैसों के ऊपर कार्य किया जाता है, इसलिये इस स्ट्रोक में भी आरेख ऋणात्मक होगा, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है। कार्यकारी स्ट्रोक में ईंधन के दहन के कारण अधिक धनात्मक आरेख प्राप्त होता है। निर्वात स्ट्रोक के शुरू में निर्वात वाल्व के खुलने से अधिक दबाव वाली गैसें वायुमण्डल में निष्कासित हो जाती हैं। कम दबाव वाली गैसों को बाहर निकालने के लिये गैसों पर कार्य करना पड़ता है, जिससे शुरू में ऋणात्मक आरेख प्राप्त होता है। निर्वात के अंत में अधिक दबाव पर ईंधन के सिलिण्डर के अंदर प्रवेश के कारण धनात्मक आरेख प्राप्त होगा।

2. **एक सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन (Single Cylinder Double Acting Steam Engine) (2014)–** चित्र में एक सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन का घुमाव घूर्ण आरेख प्रदर्शित किया गया है। यह क्रैंक के एक चक्कर के लिये है। क्रैंक के एक चक्कर में इंजन का एक चक्र (Cycle) पूर्ण होगा। (चित्र 7)

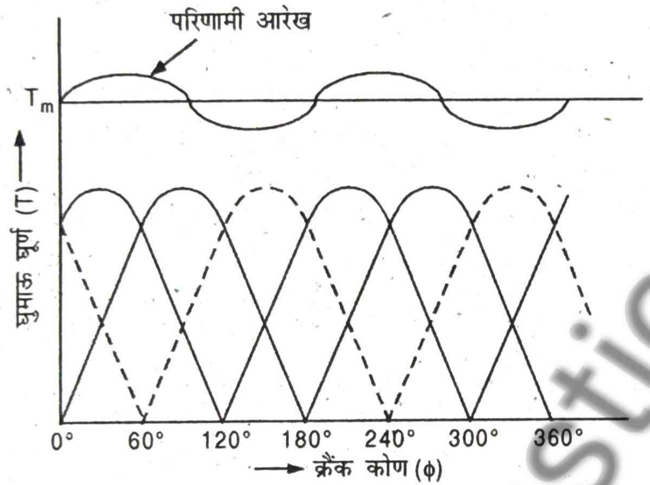
3. **तीन सिलिण्डर भाप इंजन–** चित्र में तीन सिलिण्डर भाप इंजन के लिये क्रैंक प्रयास (crank effort) आरेख प्रदर्शित किया गया है, तीनों सिलिण्डर में उत्पन्न घुमाऊ घूर्ण (Turning Moment) आरेख अलग-अलग रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है। तीन सिलिण्डर इंजन में प्रत्येक क्रैंक (Crank) 120° के अंतर पर क्रैंक शॉफ्ट के साथ जुड़े होते हैं। परिणामी घुमाऊ घूर्ण आरेख को भी (Resultant Turning Moment) चित्र (8) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6. एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक अंतर्दहन इंजन का घुमाव घूर्ण आरेख



चित्र 7. एक सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन का घुमाव घूर्ण आरेख



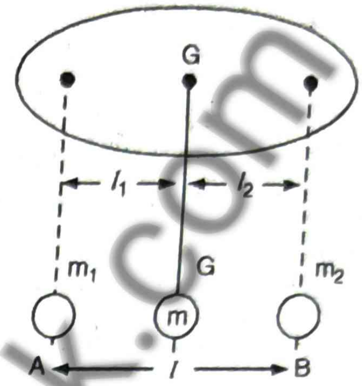
चित्र 8. तीन सिलिण्डर भाप इंजन का घुमाऊ घूर्ण आरेख

प्रश्न 5. समतुल्य गतिक निकाय से आप क्या समझते हैं? विस्तार से वर्णन कीजिये। [2006]

उत्तर– समतुल्य गतिक निकाय (Equivalent Dynamical System)– ब्राह्य बलों (External Forces) के प्रभाव में एक दृढ़ पिण्ड की गति को ज्ञात करने के लिए सामान्यतया यह आसान रहता है कि दृढ़ पिण्ड के स्थान पर दो द्रव्यमान एक स्थिर दूरी पर इस प्रकार लगायें कि–

1. दोनों द्रव्यमानों का योग दृढ़ पिण्ड के द्रव्यमान के बराबर हो।
2. दोनों द्रव्यमानों का गुरुत्व केंद्र दृढ़ पिण्ड के गुरुत्व केंद्र पर ही हो।
3. द्रव्यमानों का उनके गुरुत्व केंद्रों के परित: जड़त्व आघूर्णों का योग पिण्ड के द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण के बराबर हो।

जब उपरोक्त तीनों स्थितियां संतुष्ट होती हैं तब एक निकाय समतुल्य गतिक निकाय कहा जा सकता है। माना एक दृढ़ पिण्ड जिसका गुरुत्व केंद्र G है, चित्र में प्रदर्शित है।



चित्र 9.

माना M = पिण्ड का द्रव्यमान

K_G = गुरुत्व केंद्र G के परित: परिभ्रमण त्रिज्या,

m_1 तथा m_2 = दो माने हुए द्रव्यमान

l_1 तथा l_2 = माने हुए द्रव्यमानों की गुरुत्व केंद्रों से दूरी

l = दोनों द्रव्यमानों के बीच की दूरी

अब उपर्युक्त शर्त के अनुसार

$$= m_1 + m_2 = m \quad ...(1)$$

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \quad ...(2)$$

तथा $m_1 (l_1)^2 + m_2 (l_2)^2 = m (K_G)^2$ ...(3)

समीकरण (1) व (2) से

$$m_1 = \frac{ml_2}{l_1 + l_2} \quad \text{तथा} \quad m_2 = \frac{ml_1}{l_1 + l_2}$$

m_1 तथा m_2 के मान समीकरण (3) में रखने पर

$$\frac{ml_2}{(l_1 + l_2)}(l_1)^2 + \frac{ml_1}{l_1 + l_2}(l_2)^2 = m (K_G)^2$$

या $l_1 . l_2 = (K_G)^2$ ...(4)

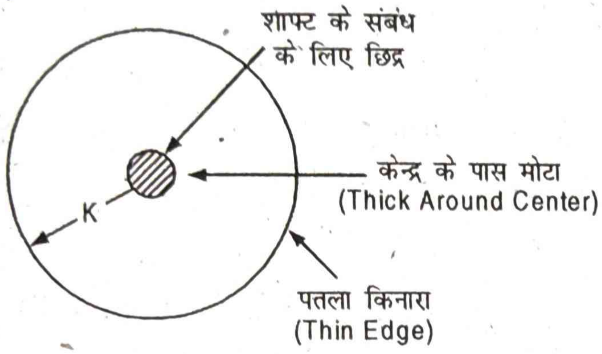
यह समीकरण दोनों द्रव्यमानों के रखने का अभीष्ट प्रतिबंध बताती है जिससे निकाय गतिक समतुल्य हो जाता है।

प्रश्न 6. गतिपाल पहिये के प्रकार का वर्णन करते हुए कार्यों की विवेचना कीजिए। (2006)

उत्तर– गतिपाल पहिये के प्रकार (Types of Fly Wheel)– साधारणतया: गतिपाल पहिये दो प्रकार के होते हैं–

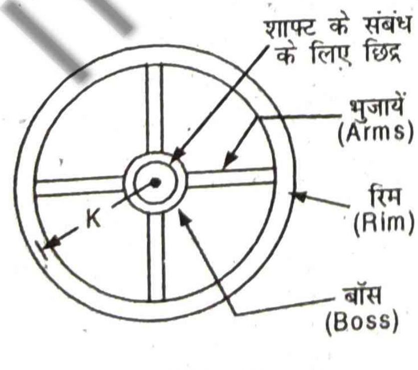
1. चकती के आकार में (Disc Type)
2. रिम के आकार में (Rim Type)

1. **चकती के आकार में (Disc Type)–** चित्र 10 में एक चकती के आकार का गतिपाल पहिया (Fly Wheel) प्रदर्शित किया गया है। इस प्रकार के गतिपाल पहिये का संपूर्ण भार पहिये के केंद्र के चारों तरफ केंद्रित होता है जिसके कारण पहिया केंद्र पर अधिक मोटा व किनारों पर पतला होता है। इस पहिये का अर्द्धव्यास उसी भार के रिम के आकार (Rim Type) के गतिपाल पहिये से कम होता है अतः यह तुलनात्मक कम ऊर्जा के उच्चावचन (Fluctuation of Energy) को नियंत्रित कर सकता है।



चित्र 10.

2. **रिम के आकार में (Rim Type)–** इस प्रकार के गतिपाल पहिये का संपूर्ण भार रिम (Rim) पर लगाया हुआ होता है। रिम के आकार के गतिपाल पहिये का लाभ यह है कि समान भार के चकती के आकार (Disc Type) के गतिपाल पहिये की तुलना में इसकी अधिक घूर्णन त्रिज्या (Radius of Rotation) होने के कारण यह अधिक ऊर्जा उच्चावचन (Fluctuation of Energy) को नियंत्रित कर सकता है। रिम एवं भुजाओं की काट आयताकार, वृत्तीय या दीर्घवृत्ताकार (Elliptical) हो सकती है। चित्र 11 में रिम के आकार का गतिपाल पहिया प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 11.

गतिपाल पहिये के कार्य– इंजन के चक्र में ऊर्जा समान परिमाण में उत्पन्न नहीं होती है वरन् कोण θ एवं ϕ के परिमाण पर निर्भर करती है। क्रैंक कोण एवं संयोजक दण्ड का क्षैतिज के साथ कोण प्रत्येक क्षण बदलते रहते हैं जिससे उत्पादित ऊर्जा का परिमाण भी परिवर्तित होता रहता है। ऊर्जा के मान में परिवर्तन से इंजन की गति भी कम व ज्यादा होती रहेगी। यह दशा प्रायोगिक नहीं है क्योंकि इंजन में ऊर्जा की खपत समान दर से होती है। वास्तविक रूप में इंजन समान गति से क्रियाशील रहते हैं। अतः ऊर्जा के उत्पादन एवं ऊर्जा की खपत अवस्थाओं के मध्य संतुलन रखने के लिए हम गतिपाल पहिये का प्रयोग करते हैं। गतिपाल पहिये का कार्य इंजन सिलिण्डर में अधिक ऊर्जा के उत्पादन की दशा में उसे शोषित करना एवं कम ऊर्जा के उत्पादन के समय पूर्व शोषित ऊर्जा को पिस्टन को प्रदान करना है। जिससे इंजन समान गति से क्रियाशील रह सके।

प्रश्न 7. इंजन की ऊर्जा एवं गति में उतार चढ़ाव को समझाते हुए विभिन्न गुणांकों को परिभाषित कीजिये।

उत्तर– हम जानते हैं घुमाव घूर्ण इंजन के चक्र में समान नहीं रहता है वरन् कभी कम तो कभी अधिक उत्पन्न होता रहता है जिससे इंजन से प्राप्त शक्ति भी परिवर्तित होती रहती है। इंजन के प्रत्येक चक्र में प्राप्त अधिकतम ऊर्जा (E_1) व निम्नतम ऊर्जा (E_2) के परिमाण के अंतर को ऊर्जा का उच्चावचन (Fluctuation of Energy) कहते हैं। इसे ($E_1 - E_2$) से प्रदर्शित किया जाता है।

ऊर्जा के प्रति चक्र में अधिकतम एवं निम्नतम परिमाणों के लिए इंजन की गति भी अधिकतम व न्यूनतम होगी। अतः प्रति चक्र अधिकतम गति (N_1) एवं निम्नतम गति (N_2) के अंतर को गति का उच्चावचन कहते हैं। इसे ($N_1 - N_2$) से प्रदर्शित करते हैं।

विभिन्न गुणांक– विभिन्न गुणांक निम्न प्रकार हैं:

1. ऊर्जा का उच्चावचन गुणांक
2. गति उतार चढ़ाव गुणांक

1. ऊर्जा का उच्चावचन गुणांक (Coefficient of Fluctuation of Energy)– ऊर्जा उच्चावचन गुणांक इंजन के अधिकतम ऊर्जा उच्चावचन एवं प्रति चक्र किये गये कार्य के अनुपात को कहते हैं। इसे e से प्रदर्शित करते हैं।

$$e = \frac{\text{ऊर्जा का उच्चावचन}}{\text{कार्य प्रति चक्र}}$$

$$= \frac{(E_1 - E_2)}{\text{कार्य प्रति चक्र}}$$

2. गति उतार-चढ़ाव गुणांक (Coefficient of Fluctuation of Speed)– यह गति में अधिकतम उतार-चढ़ाव एवं औसत गति का अनुपात है। इसे C से प्रदर्शित किया जाता है।

$$C = \frac{\text{गति में अधिकतम उतार चढ़ाव}}{\text{औसत गति}}$$

या $$C = \frac{(N_1 - N_2)}{\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)}$$

प्रश्न 8. गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा की गणना के लिए सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिये।

उत्तर– गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा की गणना करना (Calculation of Mass of Fly Wheel)–

यदि m = गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा (kg)।

E_1 = गतिपाल पहिये के एक चक्र (Cycle) में उत्पन्न अधिकतम ऊर्जा का परिमाण (Nm)।

E_2 = प्रति चक्र (Cycle) में उत्पन्न निम्नतम ऊर्जा का परिमाण (Nm)।

N_1 = प्रति चक्र (Cycle) में पहिये की अधिकतम गति च० प्र० मि० (r.p.m.)।

N_2 = प्रति चक्र (cycle) में पहिये की निम्नतम गति च० प्र० मि० (r.p.m.)।

K = गतिपाल पहिये की विघूर्णन त्रिज्या (m)

ω_1 = प्रति चक्र (Cycle) पहिये का अधिकतम कोणीय वेग (Rad./sec.)।

ω_2 = प्रति चक्र (cycle) पहिये का निम्नतम कोणीय वेग (Rad./sec.)।

$I = mK^2$ पहिये के पदार्थ की मात्रा का जड़ता घूर्ण (Mass Moment of Inertia), पहिये के केंद्र से जाने वाली अनुदैर्ध्य अक्ष के सापेक्ष।

अतः गतिपाल पहिये की अधिकतम ऊर्जा (Maximum Energy)

$$E_1 = \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2} mK^2 \times \left(\frac{2\pi N_1}{60}\right)^2 \quad ...(i)$$

[जहाँ $\omega_1 = \frac{2\pi N_1}{60}$ रेडियन/सेकण्ड]

गतिपाल पहिये की निम्नतम ऊर्जा (Minimum Energy)

$$E_2 = \frac{1}{2} I\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2} mK^2 \times \left(\frac{2\pi N_2}{60}\right)^2 \quad ...(ii)$$

[जहाँ $\omega_2 = \frac{2\pi N_2}{60}$ Red/Sec]

ऊर्जा का अधिकतम उतार-चढ़ाव (Maximum Fluctuation of Energy)

$$E_{\text{उ० च०}} = E_1 - E_2$$

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{2\pi N_1}{60}\right)^2 - \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{2\pi N_2}{60}\right)^2$$

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{4\pi^2}{3600}\right)\left[N_1^2 - N_2^2\right]$$

$$E_{\text{उ० च०}} = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)$$

(औसत गति) (गति में परिवर्तन)... (iii)

समीकरण (iii) का प्रयोग करके गतिपाल पहिये के द्रव्यमान (m) की गणना की जा सकती है।

प्रश्न 9. गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा के लिए सूत्र का व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर– यदि E_m = गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा (N-m)

एवं w = गतिपाल पहिये की औसत कोणीय गति (Rad/Sec)

$$E_m = \frac{1}{2} Iw^2$$

$$= \frac{1}{2}(mK^2)\left(\frac{2\pi N_1 + 2\pi N_2}{2 \times 60}\right)\left(\because w = \frac{w_1 + w_2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(mK^2)\frac{4\pi^2}{3600}\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad E_m=\frac{\pi^2}{900}\cdot\frac{1}{2}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)^2 \quad ...(1)$$

हम जानते हैं कि

$$E_1-E_2=\frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)(N_1-N_2)$$

या $$\frac{(E_1-E_2)}{(N_1-N_2)}=\frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right) \quad ...(ii)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$E_m=\frac{1}{2}\times\frac{(E_1-E_2)}{(N_1-N_2)}\times\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)$$

या $$E_m=\frac{1}{2}\times\frac{E_1-E_2}{\left[\dfrac{N_1-N_2}{\left(\dfrac{N_1+N_2}{2}\right)}\right]}$$

या $2\,E_m\times C=(E_1-E_2)$

हम जानते हैं कि

$(E_1-E_2)=e\,x$ कार्य प्रति चक्र

अतः $2E_m\times C=e\,x$ कार्य प्रति चक्र

या $2E_m\times\frac{C}{e}$ = कार्य/चक्र

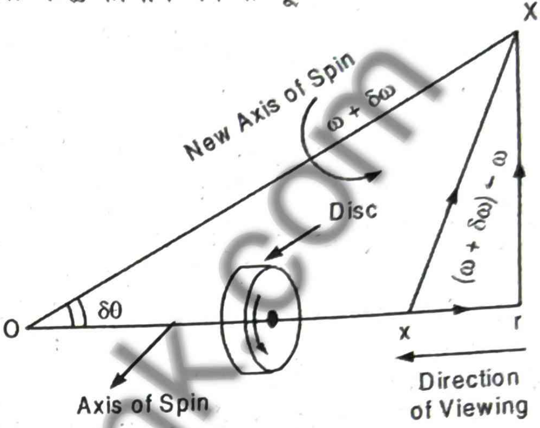
या कार्य प्रति चक्र = 2 × गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा × $\dfrac{\text{गति उतार चढ़ाव गुणांक}}{\text{ऊर्जा उतार चढ़ाव गुणांक}}$

प्रश्न 10. जाइरोस्कोपिक गतियों को विस्तार से वर्णित कीजिए।

उत्तर– जाइरोस्कोपिक गतियां (Gyroscopic Motions)

अग्र कोणीय गतियां (Precessional Angular Motion) – हम जानते हैं कि समय के सापेक्ष कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं। कोणीय त्वरण एक सदिश राशि है तथा इसको वेक्टर आरेख द्वारा (→) प्रदर्शित किया जा सकता है।

माना एक डिस्क जैसा चित्र में प्रदर्शित है, अक्ष ax (जिसे स्पिन अथवा घुमाव अक्ष भी कहते हैं) के परितः घूम रही है। सामने से देखने पर घूमने की दिशा वामावर्त (Anticlockwise) है तथा यह कागज के समतल के लम्ब समतल में ω कोणीय वेग से घूम रही है।



चित्र 12.

एक सूक्ष्म समय अंतराल δt के पश्चात, माना डिस्क नई घूर्णन अक्ष, जो $\delta\theta$ कोण पर है, के परितः कोणीय वेग $(\omega+\delta\omega)$ से घूम रही है। दाएं हाथ का पेंच नियम प्रयोग करने पर डिस्क के प्रारंभिक कोणीय वेग (ω), को वेक्टर ox द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। डिस्क के अंतिम कोणीय वेग $(\omega+\delta\omega)$ के वेक्टर ox' द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। (देखें चित्र)। वेक्टर xx', δt समय में कोणीय वेग में परिवर्तन अर्थात् डिस्क के कोणीय त्वरण को प्रदर्शित करता है। वेक्टर xx' को दो घटकों, एक ox के समांतर तथा दूसरा लम्ब में तोड़ा जा सकता है।

ax दिशा में कोणीय त्वरण का घटक,

$$a_t=\frac{xr}{\delta t}=\frac{or-ox}{\delta t}$$

$$a_t=\frac{\alpha c'\cos\delta\theta-ax}{\delta t}$$

$$=\frac{(\omega+\delta\omega)\cos\delta\theta-\omega}{\delta t}$$

$$=\frac{\omega\cos\delta\theta+\delta\theta.\cos\delta\theta-\omega}{\delta t}$$

क्योंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है अतः $\cos\delta\theta=1$ रखने पर,

$$\propto_t=\frac{\omega+\delta\omega-\omega}{\delta t}=\frac{\delta\omega}{\delta t}$$

जब $\delta t \to 0$ हो $\alpha_t = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\left(\dfrac{\delta\omega}{\delta t}\right) = \dfrac{d\omega}{dt}$

ox की लम्ब दिशा में कोणीय त्वरण का घटक

$$\alpha_c = \frac{rx'}{\delta t} = \frac{ax'.\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \frac{(\omega + \delta\omega).\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \frac{\omega.\sin\delta\theta + \delta\omega\sin\delta\omega}{\delta t}$$

क्योंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है, अत: $\sin\delta\theta = \delta\theta$ रखने पर,

$$\alpha_c = \frac{\omega.\delta\omega + \delta\theta.\delta\theta}{\delta t} = \frac{\omega.\delta\theta}{\delta t}$$

$\left(\dfrac{\delta\omega.\delta\theta}{\delta t}\right.$ को छोटा होने के कारण नगण्य मानने पर $\Big)$

जब $\delta t \to 0$ $\alpha_c = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\left(\dfrac{\omega\cdot\delta\theta}{\delta t}\right) = \omega \times \dfrac{d\theta}{dt} = \omega\cdot\omega_p$

$\therefore$ डिस्क का कुल कोणीय त्वरण = वेक्टर $xx' = \alpha_t$

तथा α_c का वेक्टर योग $= \dfrac{d\omega}{dt} + \omega \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} + \omega\cdot\omega_p$

जहाँ $\dfrac{d\theta}{dt}$, स्पिन अक्ष का किसी निश्चित अक्ष के परित: कोणीय वेग ही यह अक्ष, उस समतल के लम्बवत् होगी जिसमें स्पिन अक्ष घूम रही है। घूर्णन अर्थात् स्पिन अक्ष का कोणीय वेग$\left(\text{अर्थात } \dfrac{d\theta}{dt}\right)$, अग्र कोणीय वेग (Angular Velocity of Precession) कहलाता है तथा ω_p से प्रदर्शित होता है। वह अक्ष, जिसके परित: स्पिन अक्ष घूमती है, अग्र अक्ष (Axis of Precession) कहलाती है। अग्र अक्ष (Axis of Precession) के परित: स्पिन अक्ष की कोणीय गति (Precessional Angular Motion) को अग्र कोणीय गति कहते हैं।

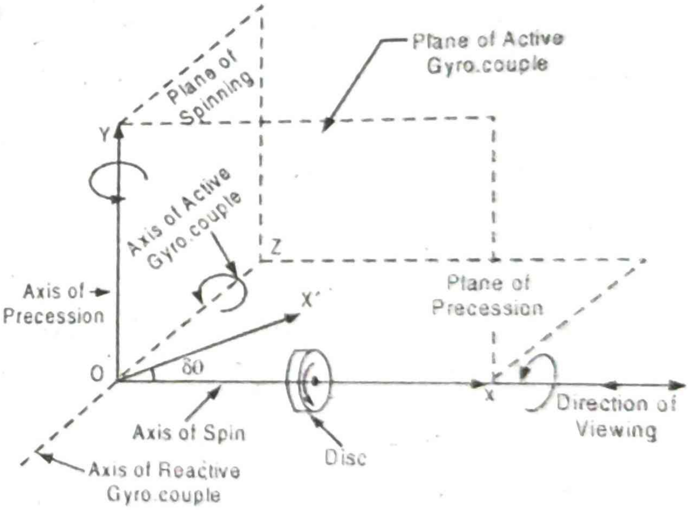
नोट– 1. अग्र अक्ष उस समतल के लंब होगी जिसमें स्पिन अक्ष घूर्णन करती है।

2. यदि डिस्क का कोणीय वेग, स्पिन अक्ष की सभी स्थितियों के लिए नियत रहता है तब $\dfrac{d\theta}{dt}$ शून्य होता है तदनुसार α_c भी शून्य होगा।

3. यदि डिस्क का कोणीय वेग, मान में नियत परंतु दिशा में परिवर्तित होता है तो डिस्क का कोणीय त्वरण α_c $= \omega\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\cdot\omega_p$ होगा। कोणीय त्वरण α_c को 'जाइरोस्कोपिक त्वरण' (Gyroscopic Acceleration) कहते हैं।

प्रश्न 11. जाइरोस्कोपिक युग्म का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिये।

उत्तर– जाइरोस्कोपिक युग्म (Gyroscopic Couple): माना एक डिस्क, स्पिन अक्ष OX के परित: ω rad/sec के कोणीय वेग से घूम रही है। सामने से देखने पर घूमने की दिशा वामावर्त होगी। (देखें चित्र 13) क्योंकि वह समतल जिसमें डिस्क घूम रही है, समतल YOZ के समानांतर है अत: यह स्पिन समतल (Plane of Spinning) कहलाता है। समतल XOZ एक क्षैतिज समतल है तथा स्पिन अक्ष के परित: क्षैतिज समतल के समानान्तर एक समतल में घूमती है। दूसरे शब्दों में, स्पिन अक्ष को अक्ष OY के परित: कोणीय वेग ω_p rad/sec से घूमता हुआ माना जा सकता है। यह क्षैतिज समतल XOZ अग्र समतल (Plane of Precession) तथा OY के अग्र अक्ष (Axis of Precession) कहलाता है।



चित्र 13.

माना $I = OX$ के परित: डिस्क का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण

ω = डिस्क का कोणीय वेग

$\therefore$ डिस्क का कोणीय संवेग $= I\,.\,\omega$

क्योंकि कोणीय संवेग एक सदिश राशि है अत: यह वेक्टर ox से प्रदर्शित किया जा सकता है। (देखें चित्र 14)

ऊपर से देखने पर स्पिन अक्ष OX, अक्ष OY के परितः वामावर्त (anticlockwise) भी घूम रही है। माना स्पिन OX अक्ष समतल XOZ में δt समय में छोटा सा कोण $\delta\theta$ घूमकर नयी स्थिति OX' पर आती है।

कोणीय वेग ω को नियम मानते हुए अब कोणीय संवेग को वेक्टर OX' से प्रदर्शित किया जाता है।

कोणीय संवेग में परिवर्तन

$$= \vec{ox}' - \vec{ox} = \vec{xx}' = \vec{ox}\cdot\delta\theta \quad (xx' \text{ की दिशा में})$$
$$= I.\omega.\delta\theta$$

तथा कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर $= I.\omega.\dfrac{\delta\theta}{\delta t}$

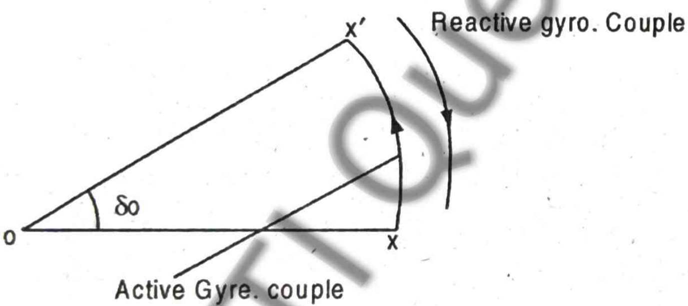
क्योंकि कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर, डिस्क पर एक बलयुग्म के प्रयोग के कारण होगा। अतः डिस्क पर लगने वाला बलयुग्म, जो अग्रता (Precession) उत्पन्न करेगा।

$$C = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\, I\omega \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$= I.\omega.\times\frac{d\theta}{dt} = I.\omega.\omega_p \quad \left(\because \frac{d\theta}{dt} = \omega_p\right)$$

जहाँ ω_p = स्पिन अक्ष की अग्रता (precession) का कोणीय वेग या स्पिन अक्ष की अक्ष OY के परितः घूर्णन गति

SI Units में, C का मात्रक N-m होगा जबकि I, kg-m^2 में है।



चित्र 14.

यहाँ यह बातें ध्यान देने योग्य हैं–

1. वेक्टर xx' की दिशा में, बलयुग्म $I.\omega.\omega_p$ क्रियाशील जाइरोस्कोपिक बलयुग्म (active gyroscopic couple) कहलाता है (देखें चित्र)। वेक्टर xx' समतल XOZ अथवा क्षैतिज समतल में होगा। बहुत सूक्ष्म विस्थापन $\delta\theta$ के लिए वेक्टर xx' ऊर्ध्वाधर समतल XOY के लम्बवत् होगा। इस प्रकार कोणीय संवेग में परिवर्तन करने वाला बलयुग्म, समतल XOY में होगा। चित्र में वेक्टर xx' समतल XOY में वामावर्त आघूर्ण प्रदर्शित करेगा अतः समतल XOY क्रियाशील जाइरोस्कोपिक बलयुग्म का समतल कहते हैं तथा अक्ष OZ जिसके परितः बलयुग्म कार्य करता है, को क्रियाशील जाइरोस्कोपिक बलयुग्म का अक्ष कहते हैं।
2. जब स्पिन अक्ष स्वयं कोणीय वेग ω_p से गति करता है तो डिस्क पर प्रतिक्रिया बलयुग्म (Reactive Couple) कार्य करता है जो समान मान $I\omega.\omega_p$ का होगा परंतु दिशा विपरीत होगी। यह प्रतिक्रिया बलयुग्म, जो डिस्क पर कार्यरत होगा जब स्पिन अक्ष, अग्र अक्ष (Axis of Precession) के परितः घूमता है। प्रतिक्रिया जाइरोस्कोपिक बलयुग्म (reactive gyroscopic couple) कहलाता है। इसका अक्ष चित्र में OZ' से प्रदर्शित है।
3. जाइरोस्कोपिक बलयुग्म प्रायः बेयरिंगों द्वारा लगाया जाता है जो शॉफ्ट को सहारते हैं। बेयरिंग समान तथा विपरीत बलयुग्म का प्रतिरोध करते हैं।
4. जाइरोस्कोपिक सिद्धांत का प्रयोग 'जाइरोस्कोप' नामक उपकरण में किया जाता है। तरंगों के रोलिंग तथा पिचिंग प्रभाव को न्यूनतम करने के लिए जाइरोस्कोप को पानी के जहाजों में लगाया जाता है। इनका प्रयोग हवाई जहाजों, मोनोरेलकारों, जाइरोकम्पास आदि में भी होता है।

प्रश्न 12. निम्न आंकड़ों के लिए एक आई सी इंजन पर जड़त्व बल ज्ञात करो।

बोर = 0.175 cm, स्ट्रोक = 0.2 m, इंजन स्पीड = 500 rpm, संयोजक दण्ड की लंबाई = 0.4 m, क्रैंक कोण = T.D.C. से 60° तथा पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का द्रव्यमान = 180 kg ।

उत्तर– दिया है $D = 0.175$ m, $L = 0.2$ m,

$$\therefore \qquad r = \frac{L}{2} = 0.1 \text{ m}, n = 500 \text{ rpm}$$

$$\text{अतः} \qquad \omega = \frac{2\pi\times 500}{60} = 52.4 \text{ rad/sec},$$

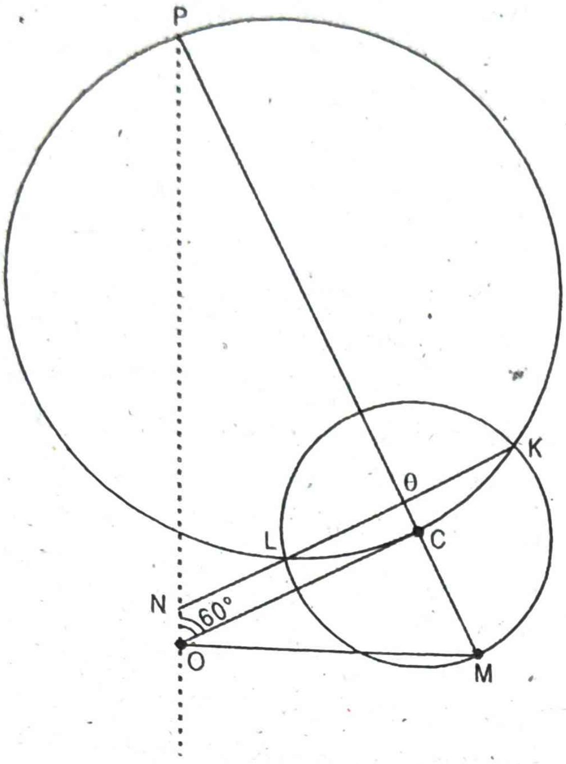
$$l = 0.4 \text{ m}, m_R = 180 \text{ kg}$$

जड़त्व बल को ग्राफिकीय अथवा वैश्लेषिक विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है–

1. **ग्राफिकीय विधि–** सर्वप्रथम हम एक उचित पैमाना

मानकर चित्र की भांति क्लेन का त्वरण आरेख बनाते हैं। मापने पर, $ON = 38$ mm$= 0.038$ m

$\therefore$ पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का त्वरण



चित्र 15.

$$a_r = \omega^2 . \times ON = (52.4)^2 \times 0.038$$
$$= 104.34 \text{ m/sec}$$

हम जानते हैं कि जड़त्व बल

$$F_I = m_R \times a_R = 180 \times 104.34$$
$$\therefore \quad F_I = 14780 \text{ N} = 18.78 \text{ kN}$$

2. वैश्लेषिक विधि– हम जानते हैं कि संयोजक दण्ड की लंबाई तथा क्रैंक का अनुपात $n = \dfrac{l}{r} = \dfrac{0.4}{0.1} = 4$

$\therefore$ जड़त्व बल

$$F_I = m_R.\omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$$
$$= 180\,(52.4)^2 \times 0.1\left[\cos 60° + \frac{\cos 120°}{4}\right]$$
$$= 18530 \text{ N} = 18.53 \text{ kN}$$

प्रश्न 13. एक इंजन के गतिपालक चक्र का भार 65 kN है तथा परिभ्रमण अर्द्धव्यास 1.87 m है। आवर्त- आघूर्ण आरेख दर्शाता है कि ऊर्जा उच्चावचन 56 kNm है। यदि इंजन का माध्यवेग 120 r.p.m. हो, तो इसकी अधिकतम गति ज्ञात कीजिये। [UPTE 2001]

उत्तर– दिया है–

(*i*) गतिपालक चक्र का भार = 65 kN

(*ii*) परिभ्रमण अर्द्धव्यास = 1.87 m

(*iii*) ऊर्जा का उच्चावचन = 56 kNm

(*iv*) माध्य गति $\dfrac{(N_1 + N_2)}{2} = 120$ r.p.m.

हम जानते हैं, कि

$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$56 \times 10^3 = \frac{3.14^2}{900}(6500 \times 1.8^2) \times 120 \times (N_1 - N_2)$$

$$(N_1 - N_2) = \frac{56 \times 1000 \times 900}{3.14^2 \times 6500 \times 1.8^2 \times 120}$$
$$= 2.0227 \text{ r.p.m.}$$

$$\text{एवं} \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) = 120 \text{ r.p.n.}$$

या
$$(N_1 + N_2) = 240 \text{ r.p.m.}$$
$$(N_1 + N_2) + (N_1 - N_2) = 240 + 2.0227$$
$$2\,N_1 = 242.0227$$
$$N_1 = 121.0.1135 = 121 \text{ r.p.m}$$
$$2N_2 = 237.9773$$
$$N_2 = 118.9886 = 119 \text{ r.p.m.}$$

प्रश्न 14. एक 200 kW का द्वि-क्रिया भाप इंजन, जो कि 120 च० प्र० मि० की मध्य गति से चलता है, में ऊर्जा का उच्चावचन माध्य से 20% होता है। गतिपाल पहिये के रिम का 1300 mm माध्य अर्द्धव्यास पर पदार्थ की मात्रा (m) निकालिये जबकि गति का उच्चावचन माध्य गति के 1% के अंदर ही रहता है।

उत्तर– दिया है,

(*i*) शक्ति $(P) = 200$ kW

(*ii*) माध्य गति $\left(\dfrac{N_1 + N_2}{2}\right) = 120$ च० प्र० मि०

(*iii*) ऊर्जा का उच्चावचन $(E_1 - E_2) = 20\%$ माध्य ऊर्जा

(*iv*) माध्य अर्धव्यास $(K) = 1300$ mm $= 1.30$ m

(*v*) गति का उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 1\%$ माध्य गति

$$= 120 \times \frac{1}{100} = 1.2 \text{ च० प्र० मि०}$$

हम जानते हैं कि, $P = \frac{2\pi NT}{60}$

यहाँ, N = माध्य गति च० प्र० मि० में।

T = माध्य मरोड़ घूर्ण (Twisting Moment) Nm में।

या, $$(2\pi T) = \frac{P \times 60}{N} = \frac{200 \times 10^3 \times 60}{120}$$
$$= 1 \times 10^5 \text{ Nm}$$

अत:

$$(E_1 - E_2) = 1 \times 10^5 \times \frac{20}{100} = 20 \times 10^3 \text{ N-m}$$

यहाँ $(2\pi T)$ गतिपाल पहिये के एक चक्कर में किया गया कार्य है। क्योंकि भाप इंजन में दो स्ट्रोक होते हैं और इंजन का एक चक्र (Cycle) भी गतिपाल पहिये के एक चक्कर में पूर्ण होता है इसलिये $(2\pi T)$ एक चक्र (Cycle) में किया गया कार्य होगा।

समीकरण (*iii*) से हम जानते हैं कि इंजन के प्रति चक्र (Cycle) ऊर्जा का उच्चावचन,

$$(E_1 - E_2) = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$20 \times 10^3 = \frac{3.14^2}{900}(m \times 1.30^2) \times 120 \times 1.2$$

$$m = \frac{20 \times 10^3 \times 900}{3.14^2 \times 1.30^2 \times 120 \times 1.2}$$
$$= 7501.77 \text{ किग्रा}$$

प्रश्न 15. एक चार स्ट्रोक इंजन जो 240 rpm पर 20 kW शक्ति उत्पन्न करता है, के गतिपालक पहिये का द्रव्यमान ज्ञात कीजिये जबकि इंजन द्वारा पॉवर स्ट्रोक के समय कार्य पूरे चक्र (cycle) में औसत कार्य का 1.4 गुना है। गतिपालक पहिये का औसत व्यास 1800mm है और इसकी चाल का उच्चावचन 5% है। इंजन के धुरे पर औसत आघूर्ण भी ज्ञात कीजिये।

उत्तर– दिया है,

(*i*) चार स्ट्रोक इंजन (Four Stroke Engine)

(*ii*) औसत गति $(N) = 240$ r.p.m.

(*iii*) उत्पादित शक्ति $(P) = 22$ kW $= 20 \times 10^3$ W

(*iv*) पॉवर स्ट्रोक में किया गया कार्य = 1.4 × औसत ऊर्जा

(*v*) चाल का उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 5\% \times$ औसत चाल (N)

(*vi*) रिम का औसत व्यास $(D) = 1800$ mm = 1.8 m

हम जानते हैं, कि

$$P = \frac{2\pi NT}{60}$$

यहाँ P = उत्पन्न शक्ति वाट (watt) में।

N = गतिपालक के चक्कर प्रति मिनट।

T = मादय मरोड़ घूर्ण न्यूटन-मी में।

प्रति चक्र (Cycle) किया गया कार्य

$$2\pi T = \frac{P \times 60}{N} \times 2$$
$$= \frac{20 \times 10^3 \times 60 \times 2}{240}$$
$$= 1 \times 10^4 \text{ N-m}$$

(उपरोक्त सूत्र में 2 से गुणा चार स्ट्रोक इंजन के कारण किया गया है।)

पॉवर स्ट्रोक में किया गया कार्य

$$= 1.4 \times 1 \times 10^4$$
$$= 1.4 \times 10^4 \text{ Nm}$$

प्रत्येक स्ट्रोक में किया गया औसत कार्य

$$= \frac{1 \times 10^4}{4} = 2.5 \times 10^3 \text{ Nm}$$

अत: ऊर्जा का उच्चावचन $(E_1 - E_2)$

$$= (1.4 \times 10^4 - 2.5 \times 10^3) \text{ Nm}$$
$$= 1.15 \times 10^4 \text{ Nm}$$

सूत्र $$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900} mK^2 \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$1.15 \times 104 = \frac{3.14^2}{900} \times m \times 0.90^2 \times 240 \times \left(240 \times \frac{5}{100}\right)$$

$$r = \frac{1.15 \times 10^4 \times 900 \times 100}{3.14^2 \times 0.90^2 \times 240 \times 240 \times 5}$$
$$= 449.99 \text{ kg} = 450 \text{ kg}$$

प्रश्न 16. एक पंचिंग मशीन एक मिनट में 6 छिद्र बनाती है। प्रत्येक छिद्र जिसका व्यास 40 mm है, 35 mm मोटाई की प्लेट में छिद्र करने हेतु प्रति मिमी^{2} अपरूपण क्षेत्रफल के लिये 8 Nm ऊर्जा की आवश्यकता होती है। पंच का स्ट्रोक 95 mm है। अगर गतिपालक चक्र की माध्य गति 20 मी०/से० हो, तो मोटर के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए। गति में पूर्ण उच्चावचन माध्य गति से 3% से अधिक नहीं होना चाहिए। गतिपालक चक्र का द्रव्यमान (mass) भी ज्ञात कीजिये।

[UPBT 2002]

उत्तर– दिया है,

(*i*) छिद्र का व्यास $(d) = 40$ mm

(*ii*) प्लेट की मोटाई $(t) = 35$ mm

(*iii*) ऊर्जा की आवश्यकता (E_1) प्रति मिमी^{2} अपरूपण क्षेत्रफल के लिए = 8 Nm

(*iv*) पंच का स्ट्रोक $(l) = 95$ mm

(*v*) गतिपालक चक्र की माध्य गति $(v) = 20$m/s

(*vi*) गति का उच्चावचन $(v_1 - v_2) = 3\%$

(*vii*) प्रति मिनट बनाये गये छिद्रों की संख्या $(n) = 6$

(अ) मोटर की आवश्यक शक्ति

प्रतिछिद्र कर्तन क्षेत्रफल $(A) = \pi dt = 3.14 \times 40 \times 35$

$= 4396$ mm^2

प्रतिछिद्र ऊर्जा की खपत $(E_1) = 8 \times 4396$

$= 35168$ Nm

एक छिद्र को बनाने में लगा समय $= \frac{60}{10} = 10$ सेकण्ड

प्रति सेकण्ड ऊर्जा की खपत $= \frac{35168}{10}$

$= 3516.8$ Nm/s

अत: मोटर की आवश्यक शक्ति $(P) = 3516.8$ W

$= 3.5168$ kW

(ब) गतिपालक चक्र का द्रव्यमान

यदि m = गतिपालक चक्र का द्रव्यमान किग्रा. में

l = स्ट्रोक की लंबाई = 95 mm

t = प्लेट की मोटाई = 35 mm

अत: एक छिद्र पंच करने में लगा समय

$$= \frac{10}{2 \times 95} \times 35 = 1.842$$

मोटर द्वारा खर्च की गई ऊर्जा $(E_2) = 3516.8 \times 1.842$

$= 6477.9456$ Nm

अत: ऊर्जा का उच्चावचन

$E_1 - E_2 = 35168 - 6477.9456$

$= 28690.054$ Nm

भूमि का उच्चावचन गुणांक

$$(C) = \frac{(v_1 - v_2)}{v} = 0.03$$

हम जानते हैं कि अधिकतम ऊर्जा का उच्चावचन

$(E_1 - E_2) = mv^2C$

$28690.054 = m \times (20)^2 \times 0.03$

$m = 2390.8378$ किग्रा

नोट– ऊर्जा का अधिकतम उच्चावचन निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है।

क्योंकि

$$E_1 = 35168 \text{ Nm}$$

$$\text{अत: } E_1 - E_2 = E_1\left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}\right]$$

$$= E_1\left[1 - \frac{t}{2l}\right]$$

$$= 35168\left[1 - \frac{35}{2 \times 95}\right]$$

$$= 28690.054 \text{ Nm}$$

प्रश्न 17. किसी बहु-सिलिण्डर (Multi-Cylinder) इंजन में ऊर्जा का उतार-चढ़ाव 11 kN-m है। गति में उतार-चढ़ाव (Fluctuation) की सीमा 270 च० प्र० मि० (RPM) की औसत गति से ± 2.1% है। प्रयोग किये जाने वाले गतिपालक पहिये का व्यास 1.8 m हो तो उसकी संहति (Mass) ज्ञात कीजिये।

उत्तर– यहाँ पर,

$$E_{\text{उ० च०}} = 11\text{kN-m} = 11{,}000 \text{ N-m}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{N_1 + N_2}{2} = 270 \text{ rpm}$$

$$\text{गति में परिवर्तन} = 2 \times 2.1 \times \frac{270}{100} = 11.34$$

$$\text{तथा} \quad K = \frac{1.8}{2} = 0.9 \text{ m}$$

$$\text{तथा} \quad 11{,}000 = \frac{\pi^2}{900} m \times (0.9)^2 \times 270 \times 11.34$$